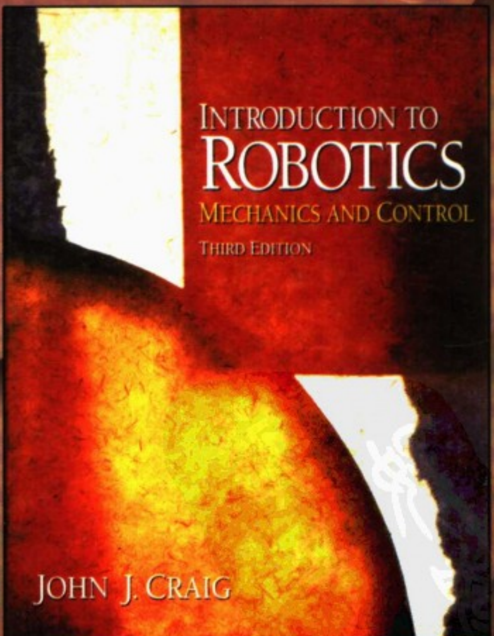
（原书第3版）

机器人学导论

Introduction to Robotics
Mechanics and Control
Third Edition

（美）John J. Craig 著
贠超 等译



机械工业出版社
China Machine Press

VISIT…

LANZAROTE Caliente.com

Introduction to Robotics
Mechanics and Control (Third Edition)

机器人学导论
（原书第3版）

本书源于作者在斯坦福大学教授“机器人学导论”课程的讲义撰写而成。经过两次修订，曾被美国多所大学采用为教材。

Craig教授根据机器人学的特点，将理论和实际应用密切结合，按照刚体力学、分析力学、机构学和控制理论中的原理和定义对机器人运动学、动力学和控制中的原理进行了严谨的阐述，语言精练，内容深入浅出，例题简单易懂，体现出Craig教授在机器人学方面高深的造诣。本书是当今机器人学研究领域的经典之作。

作者简介

John J. Craig 斯坦福大学荣誉教授。

PEARSON Education

PEARSON Prentice Hall www.PearsonEd.com

上架指导：计算机工程/机器人

ISBN 7-111-18681-8

9 787111 186816

封面设计·锡 彬

华章网站 http://www.hzbook.com

网上购书：www.china-pub.com

投稿热线：(010) 88379604

购书热线：(010) 68995259, 68995264

读者信箱：hzjsj@hzbook.com

HZ BOOKS 华章图书

ISBN 7-111-18681-8

定价：42.00 元

(原书第3版)

机器人学导论

Introduction to Robotics Mechanics and Control

Third Edition

(美) John J. Craig 著

贠超 等译

机械工业出版社
China Machine Press

本书系统讲解机器人学的理论知识，主要内容包括：机器人操作臂的几何性质，引起操作臂运动的力和力矩，与操作臂机械设计有关的问题和控制方法，机器人编程方法等。本书曾作为美国斯坦福大学机器人学导论的教材，经过两次修订。书中还包括大量分级的习题和编程作业，适合教学参考。

本书可作为高等院校相关专业的教材或参考书，也可供相关技术人员参考。

Simplified Chinese edition copyright © 2006 by Pearson Education Asia Limited and China Machine Press.

Original English language title: *Introduction to Robotics: Mechanics and Control, Third Edition* (ISBN 0-201-54361-3) by John J. Craig. Copyright © 2005.

All rights reserved.

Published by arrangement with the original publisher, Pearson Education, Inc., publishing as Pearson Education, Inc..

本书封面贴有Pearson Education（培生教育出版集团）激光防伪标签，无标签者不得销售。

版权所有，侵权必究。

本书法律顾问　北京市展达律师事务所

本书版权登记号：图字：01-2004-6542

图书在版编目（CIP）数据

机器人学导论（原书第3版）/（美）克来格（Craig, J. J.）著，贠超等译．－北京：机械工业出版社，2006.6

书名原文：Introduction to Robotics: Mechanics and Control, Third Edition

ISBN 7-111-18681-8

Ⅰ．机…　Ⅱ．①克…　②贠…　Ⅲ．机器人学　Ⅳ．TP24

中国版本图书馆CIP数据核字（2006）第021007号

机械工业出版社（北京市西城区百万庄大街22号　邮政编码　100037）

责任编辑：乔翠梅　耿　娅

北京京北制版印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行

2006年6月第1版第1次印刷

184mm×260mm · 20.75印张

定价：42.00元

凡购本书，如有倒页、脱页、缺页，由本社发行部调换

本社购书热线（010）68326294

译 者 序

机器人技术是集机械、电子、自动控制、计算机以及人工智能等多学科领域的一项综合性应用技术。

人类利用自然力代替人力劳动创造了许多自动工具和自动机械，这已有几千年的历史。例如中国西周时代的歌舞伶人，春秋后期木匠鲁班制造的木鸟，东汉时期张衡发明的计里鼓车，后汉三国时期诸葛亮发明的木牛流马，国外公元前2世纪的古希腊人发明了一种自动机，1738年法国人发明了一种机器鸭，1773年瑞士钟表匠杰克·道罗斯发明的能自动书写和演奏的玩偶，18世纪末日本人发明的端茶玩偶等。但是真正按照现代机器人的定义研究、制造和应用机器人的历史距今只有几十年。实际上，真正意义上的机器人是随着计算机的出现诞生的。1961年美国Unimate公司生产了第一台商用工业机器人。1980年开始日本等国迅速普及工业机器人，国际上称这年为“机器人元年”。随着机构学、自动控制理论、计算机技术的发展，传统的机器人已由欠自由度操作臂发展到冗余度操作臂、行走机器人、拟人机器人、多机器人系统等多种形式，2005年9月，日本已研制出能够控制平衡的骑自行车的拟人机器人。

本书是美国斯坦福大学的J.J.Craig教授在机器人学和机器人技术方面多年的研究和教学工作的积累。Craig教授根据机器人学的特点，将理论和实际应用密切结合，按照刚体力学、分析力学、机构学和控制理论中的原理和定义对机器人运动学、动力学和控制中的原理进行了严谨的阐述，语言精练，内容深入浅出，例题简单易懂，没有丝毫玄虚造作，俨然是大师风范，体现出Craig教授在机器人学方面高深的造诣。本书不愧为当今机器人学研究领域的经典之作。

本书第1~3章、第9~13章以及部分习题答案、相关公式和索引由贠超翻译，第4章由李成群翻译，第5章由陈心颐翻译，第6章由宁凤艳翻译，第7、8章由高志慧翻译。全书由贠超校对整理，对原书中的错误作了修正，对描述不清之处作了补充完善。

承蒙感谢对本书校对稿提出的宝贵意见。

本书可作为机械电子工程专业、自动控制专业和计算机专业高年级本科生、硕士生或博士生的教学参考书，也可供从事机器人和自动化装备等应用开发工作的技术人员参考。

限于译者的经验和水平，书中难免存在许多缺点和错误，欢迎读者批评指正。

译 者

2005年9月28日

前　言

科学家常会感到通过自己的研究工作在不断地认识自我，物理学家在工作中认识到了这一点，同样，心理学家和化学家也认识到了这一点。在机器人学的研究中，研究领域和研究者自身之间的关系尤为明显。并且，与那些纯理论的自然科学不同，当前机器人学是一门侧重于综合的工程科学。也许正是这个原因，才使许多人迷恋于这个领域。

机器人学研究的是怎样综合运用机械、传感器、驱动器和计算机来实现人类某些方面的功能。显然，这是一项庞大的任务，它必然需要运用各种“传统”领域的研究思想。

现今，机器人学诸方面的研究工作都是由不同领域的专家们进行的。通常没有一个人能够完全掌握机器人领域的所有知识。因此，自然有必要对这个研究领域进行分类。在更高的层次上，可把机器人学划分为四个主要领域：机械操作、移动、计算机视觉和人工智能。

本书介绍机械操作的理论和工程知识，这是机器人学的分支学科，它是建立在几个传统学科基础之上的。主要的相关学科有力学、控制理论、计算机科学。在本书中，第1章至第8章包括机械工程和数学的专题，第9章至第11章为控制理论的题材，第12章和第13章属于计算机科学的内容。另外，本书自始至终强调通过计算解决问题。例如，与力学密切相关的每一章都有一节简要介绍计算方面的问题。

本书源于斯坦福大学1983~1985年秋季学期的“机器人学导论”的讲义。第1版和第2版在1986~2002年间被许多大学采用。第3版得益于这些应用，并且根据多方面的反馈意见做了修改和改进。在此，向那些对本书作者提出修正意见的人表示感谢。

本书适用于高年级本科生或者低年级研究生课程。选修此课程的学生如果学过静力学和动力学这两门基础课程之一，同时学习过线性代数，并且能够使用计算机高级语言编程，这将有助于学习。此外，虽然不必先修控制理论方面的入门课程，但学过这门课程也是有益的。本书的目标之一是以简单、直观的方式介绍机器人学的知识。特别需要指出的是，虽然本书很多内容源于机械专业，但本书的读者不一定是机械工程师。在斯坦福大学，很多电气工程师、计算机科学家、数学家都认为本书具有很强的可读性。

虽然本书直接由机器人系统的研发工程师使用，但是对于任何将要从事机器人研究工作的人，本书内容应当被看作是重要的背景资料。同样，至少从事过某种硬件的软件开发人员和不直接参与机器人的机械和控制的研究人员，应当具备一些本书提供的背景知识。

第3版和第2版相似，分为13章。本书的材料适合于一个学期讲授，如果要在半学期内讲授，需要略去一些章节。即便如此，仍然无法深入讲解所有专题。本书在编写时从某些方面考虑了这一点；例如，大多数章节只采用一种方法解答常见的问题。编写本书的主要问题之一就是尽量在限定的教学时间内为每个主题合理地分配时间。为此，我的办法是只考虑那些直接与学习机器人操作相关的材料。

在每章的最后都有一组习题。在每道习题题号后的方括号中给出习题的难度系数。难度系数在[00]到[50]之间。[00]是最简单的题目，[50]是尚未被解决的研究性问题⊖。当然，一

⊖ 我采用了与D.Knuth所著《The Art of Computer Programming》（Addison-Wesley出版）同样的难度等级。

个人认为困难的问题，另一个人可能认为容易，因此，难度系数在某些情况下会使人疑惑。不过，毕竟这种方法在某种程度上对这些习题的难度作出了评价。

在每章的末尾，有一个编程作业，学生可以把该章的知识应用到一个简单的三关节平面操作臂中。这个简单的操作臂足以证明大多数一般操作臂的所有原理，而不必使学生陷入过于复杂的问题中。每个编程作业都建立在前一个作业的基础上，到课程结束时，学生就会得到一个完整的操作臂软件程序库。

另外，我们在本书第3版中增补了使用MATLAB的习题。第1~9章共有12道使用MATLAB的习题。这些习题由俄亥俄大学的Robert L. Williams II教授编写，我对他所做的贡献深表感谢。这些习题可以配合澳大利亚CSIRO首席研究科学家Peter Corke编写的MATLAB机器人学工具箱⊖使用。

第1章是机器人学的概述，介绍一些背景资料、基本思想和本书所使用的符号，并预览后面各章的内容。

第2章包括描述三维空间中的位置与方法的数学知识。这是极为重要的内容：通过定义机械操作本身与周围空间的移动物体（部件、工具、机器人自身）联系起来。我们需要用一种易于理解并且尽可能直观的方式来描述这些动作。

第3章和第4章讨论机械操作臂的几何性质。介绍机械工程学科中的运动学分支，这个分支研究运动但不考虑引起这种运动的力。在这两章里，我们讨论操作臂运动学，但把研究范围限定在静态定位问题上。

第5章将运动学的研究范围扩展到速度和静力方面。

第6章开始研究引起操作臂运动的力和力矩。这就是操作臂动力学问题。

第7章描述操作臂在空间的运动轨迹。

第8章涉及许多与操作臂机械设计有关的问题。例如，设计多少个关节是适宜的，关节的类型应是什么，它们需如何布局。

第9章和第10章研究操作臂的控制方法（通常利用数字计算机），使其准确地经过预先设定的空间轨迹。第9章研究线性控制方法，第10章将研究拓展到非线性领域。

第11章讨论操作臂的主动力控制。这就是研究如何对操作臂施加的力进行控制，这种控制模式在操作臂接触周围环境的情况下非常重要，比如操作臂用海绵擦窗户。

第12章概述机器人编程方法，特别是机器人编程系统中所需的基本内容以及与工业机器人编程相关的特殊问题。

第13章介绍离线仿真和编程系统，其中介绍了人与机器人接口的最新进展。

我非常感谢牺牲宝贵时间协助我完成这本书的许多人。首先，感谢斯坦福大学1983~1985届ME219班的同学们，他们在学习初稿时发现了不少错误，并提出了许多建议。Bernard Roth教授在多方面给予了帮助，不仅对草稿提出了建设性的意见，而且为我提供了完成第1版的条件。在SILMA公司，我得到了很好的仿真环境和资源，从而使我完成了第2版。Jeff Kerr博士写出第8章的初稿，Robert L. Williams II教授设计了每章最后的MATLAB习题。Peter Corke扩充了他的Robotics Toolbox（机器人学工具箱），以此支持本书采用的Denavit-Hartenberg符号体系。在此，我也深深地感谢我在机器人学方面的导师Marc Raibert、Carl Ruoff、Tom Binford 和Bernard Roth。

⊖ 关于MATLAB机器人学工具箱，请访问http://www.ict.csiro.au/robotics/ToolBox7.htm。

我还要感谢来自斯坦福大学、SILMA公司、Adept公司和其他地方的许多人，他们以各种方式对我提供了帮助，他们是John Mark Agosta、Mike Ali、Lynn Balling、Al Barr、Stephen Boyd、Chuck Buckley、Joel Burdick、 Jim Callan、Brian Carlisle、Monique Craig、Subas Desa、Tri Dai Do、Karl Garcia、Ashitava Ghosal、Chris Goad、Ron Goldman、Bill Hamilton、Steve Holland、Peter Jackson、Eric Jacobs、Johann Jäger、 Paul James、Jeff Kerr、Oussama Khatib、Jim Kramer、Dave Lowe、Jim Maples、Dave Marimont、Dave Meer、Kent Ohlund、Madhusudan Raghavan、Richard Roy、Ken Salisbury、Bruce Shimano、Donalda Speight、Bob Tilove、Sandy Wells 和Dave Williams。

斯坦福大学的Roth教授在给2002届的学生们讲授机器人课程时使用了本书第2版，并指出了许多错误，这些错误在第3版中做了修订。

最后，我还要感谢Prentice Hall出版社的Tom Robbins对第1版和本版给予的指导和帮助。

J. J. C.

目　录

译者序
前言
第1章　绪论 …… 1
1.1　背景 …… 1
1.2　操作臂的机构与控制 …… 3
1.3　符号 …… 10
参考文献 …… 11
习题 …… 12
编程习题 …… 12
MATLAB习题 …… 13
第2章　空间描述和变换 …… 14
2.1　概述 …… 14
2.2　描述：位置、姿态与坐标系 …… 14
2.3　映射：从坐标系到坐标系的变换 …… 17
2.4　算子：平移、旋转和变换 …… 22
2.5　总结和说明 …… 25
2.6　变换算法 …… 26
2.7　变换方程 …… 28
2.8　姿态的其他描述方法 …… 29
2.9　自由矢量的变换 …… 39
2.10　计算分析 …… 40
参考文献 …… 41
习题 …… 42
编程习题 …… 46
MATLAB习题1 …… 47
MATLAB习题2 …… 47
第3章　操作臂运动学 …… 48
3.1　概述 …… 48
3.2　连杆描述 …… 48
3.3　关于连杆连接的描述 …… 50
3.4　对连杆附加坐标系的规定 …… 52
3.5　操作臂运动学 …… 57
3.6　驱动器空间、关节空间和笛卡儿空间 …… 59
3.7　举例：两种典型机器人的运动学问题 …… 60
3.8　坐标系的标准命名 …… 68
3.9　工具的定位 …… 70
3.10　计算问题 …… 70
参考文献 …… 70
习题 …… 71
编程习题 …… 76
MATLAB习题 …… 76
第4章　操作臂逆运动学 …… 78
4.1　概述 …… 78
4.2　可解性 …… 78
4.3　当$n<6$时操作臂子空间的描述 …… 81
4.4　代数解法与几何解法 …… 83
4.5　通过化简为多项式的代数解法 …… 87
4.6　三轴相交的PIEPER解法 …… 88
4.7　操作臂逆运动学实例 …… 90
4.8　标准坐标系 …… 97
4.9　操作臂求解 …… 98
4.10　重复精度和定位精度 …… 99
4.11　计算问题 …… 99
参考文献 …… 99
习题 …… 100
编程习题 …… 103
MATLAB习题 …… 104
第5章　速度和静力 …… 106
5.1　概述 …… 106
5.2　时变位姿的符号表示 …… 106
5.3　刚体的线速度和角速度 …… 108
5.4　对角速度的进一步研究 …… 110
5.5　机器人连杆的运动 …… 113
5.6　连杆间的速度传递 …… 113
5.7　雅可比 …… 117
5.8　奇异性 …… 119
5.9　作用在操作臂上的静力 …… 121
5.10　力域中的雅可比 …… 123

5.11 速度和静力的笛卡儿变换 ……124
参考文献 ……126
习题 ……127
编程习题 ……128
MATLAB习题 ……129
第6章 操作臂动力学 ……131
6.1 概述 ……131
6.2 刚体的加速度 ……131
6.3 质量分布 ……133
6.4 牛顿方程和欧拉方程 ……136
6.5 牛顿-欧拉迭代动力学方程 ……137
6.6 迭代形式与封闭形式的动力学方程 ……140
6.7 封闭形式动力学方程应用举例 ……140
6.8 操作臂动力学方程的结构 ……143
6.9 操作臂动力学的拉格朗日公式 ……145
6.10 建立笛卡儿空间的规范化操作臂动力学方程 ……147
6.11 计及非刚体效应 ……150
6.12 动力学仿真 ……151
6.13 计算效率问题 ……151
参考文献 ……153
习题 ……155
编程习题 ……157
MATLAB习题1 ……158
MATLAB习题2 ……159
MATLAB习题3 ……159
第7章 轨迹的生成 ……161
7.1 概述 ……161
7.2 关于路径描述和路径生成的综述 ……161
7.3 关节空间规划方法 ……162
7.4 笛卡儿空间规划方法 ……173
7.5 笛卡儿路径的几何问题 ……175
7.6 路径的实时生成 ……177
7.7 使用机器人编程语言描述路径 ……178
7.8 使用动力学模型的路径规划 ……179
7.9 无碰撞路径规划 ……179
参考文献 ……180
习题 ……180
编程习题 ……182
MATLAB习题 ……183
第8章 操作臂的机械设计 ……184
8.1 概述 ……184
8.2 基于任务需求的设计 ……184
8.3 运动学构形 ……186
8.4 工作空间属性的定量测量 ……191
8.5 冗余机构与闭链机构 ……193
8.6 驱动方式 ……195
8.7 刚度与变形 ……197
8.8 位置检测 ……200
8.9 力检测 ……201
参考文献 ……202
习题 ……204
编程习题 ……207
MATLAB习题 ……207
第9章 操作臂的线性控制 ……209
9.1 概述 ……209
9.2 反馈与闭环控制 ……209
9.3 二阶线性系统 ……210
9.4 二阶系统的控制 ……216
9.5 控制律的分解 ……217
9.6 轨迹跟踪控制 ……219
9.7 抗干扰 ……219
9.8 连续时间控制与离散时间控制 ……221
9.9 单关节的建模和控制 ……221
9.10 工业机器人控制器的结构 ……226
参考文献 ……227
习题 ……227
编程习题 ……229
MATLAB习题 ……229
第10章 操作臂的非线性控制 ……231
10.1 概述 ……231
10.2 非线性系统和时变系统 ……231
10.3 多输入多输出控制系统 ……234
10.4 操作臂的控制问题 ……235
10.5 实际应用中的问题 ……236
10.6 当前的工业机器人控制系统 ……239
10.7 李雅普诺夫稳定性分析 ……241
10.8 基于笛卡儿空间的控制系统 ……244

10.9 自适应控制……248
参考文献……248
习题……249
编程习题……252
第11章 操作臂的力控制……253
11.1 概述……253
11.2 工业机器人在装配作业中的应用……253
11.3 局部约束任务中的控制坐标系……254
11.4 力/位混合控制问题……258
11.5 质量-弹簧系统的力控制……258
11.6 力/位混合控制方法……261
11.7 当前的工业机器人控制方法……265
参考文献……266
习题……267
编程习题……269
第12章 机器人编程语言及编程系统……270
12.1 概述……270
12.2 机器人编程的三个级别……270
12.3 应用实例……272
12.4 机器人编程语言的必要条件……273
12.5 机器人编程语言的特殊问题……276
参考文献……278
习题……279
编程习题……280
第13章 离线编程系统……281
13.1 概述……281
13.2 离线编程系统的核心问题……282
13.3 引导仿真器……286
13.4 离线编程系统的自动子任务……292
参考文献……293
习题……295
编程习题……295
附录A 三角恒等式……296
附录B 24种角坐标系的旋转矩阵定义……297
附录C 逆运动学公式……300
部分习题答案……301
索引……308

第1章 绪 论

1.1 背景

工业自动化的历史是以技术手段的快速更新为特征的。这种自动化技术的更新不论是看作世界经济发展的诱因还是结果，都和世界经济密切相关。**工业机器人**在20世纪60年代毫无疑问是一种独特的设备[1]，将其和计算机辅助设计（CAD）系统、计算机辅助制造（CAM）系统结合在一起应用，这是现代制造业自动化的最新发展趋势。这些技术正在引导工业自动化向一个新的领域过渡[2]。

在北美，20世纪80年代初期工业机器人的应用很多，到晚期有一个短暂的回落。从那时开始，工业机器人市场虽然像所有产品一样受到经济波动的影响，但仍然不断成长（图1-1）。

图1-2反映了机器人在世界主要工业区的年安装使用量。我们注意到日本的统计数字在某种程度上与其他地区不同：他们将一些世界其他地区认为不属于机器人的机器也算作机器人（然而这些机器仅能被看作是工厂的设备）。因此，日本的统计数字稍有夸张。

工业机器人使用量增长的主要原因是价格不断降低。图1-3表明在20世纪90年代的十年间，机器人价格降低而劳动力成本增加。机器人不仅越来越便宜，而且它们在工业领域变得更加有效——速度更快、操作更准确、更富有柔性。如果在成本统计中将质量因素考虑在内，应用机器人的成本将比它的实际价格下降快得多。由于机器人作业变得愈加有效，而劳动力成本不断升高，因此工业中越来越多的作业更适合于应用机器人自动化。这是推动工业机器人市场发展的主要因素。其次是非经济因素造成的，随着机器人作业能力的增强，它们可以完成更加危险或是人类不可能完成的工作。

虽然工业机器人的应用日趋成熟，但2000年在美国近78%的机器人仍应用于焊接和物料搬运作业。而在技术要求更高的领域，例如机器人**装配**作业，则仅装备有大约10%的机器人[3]。

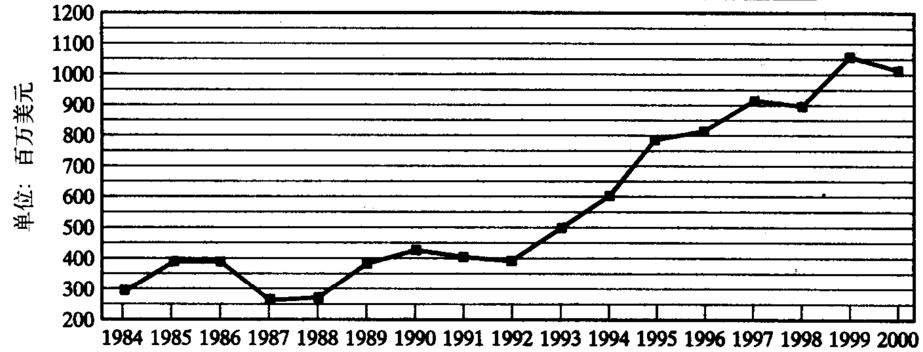


图1-1 北美工业机器人的装运量（单位：百万美元）[3]

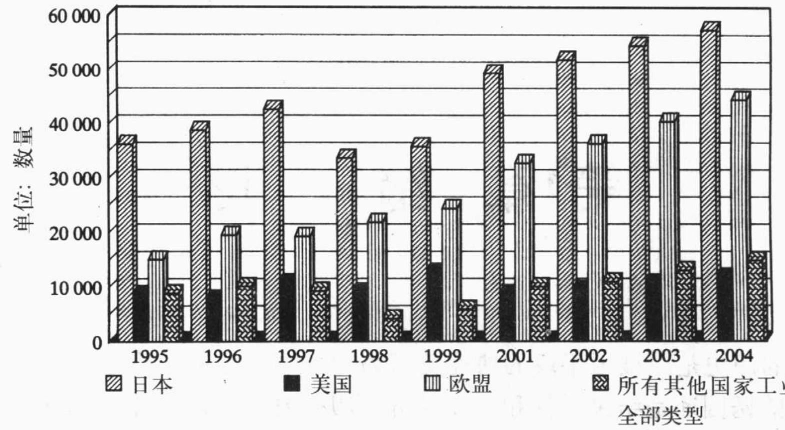


图1-2 1995～2000年各种用途工业机器人的年安装量和2001～2004年预计年安装量[3]

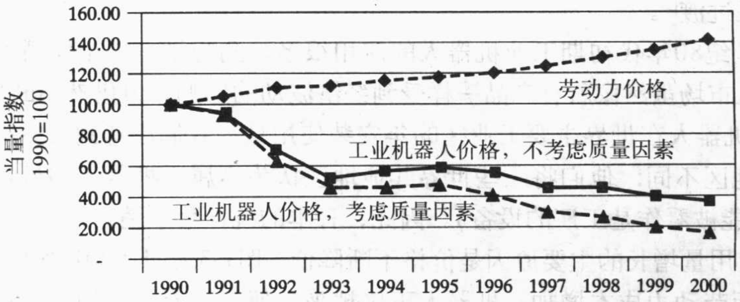


图1-3 20世纪90年代机器人价格与人力成本的比较[3]

本书重点阐述了操作臂的机构和控制理论，**操作臂**是工业机器人中最重要的一种类型。操作臂是否可称作工业机器人受到争议。如图1-4所示的装备通常被认为属于工业机器人的范畴，而数控（NC）磨床则通常在此范畴之外。这种区别在某种程度上依赖于设备可编程能力的复杂程度。如果一台机械设备在编程后可实现多种用途，则很可能被称作工业机器人。如果一台设备的主要功能都被限定用来执行同一类型任务，一般则把它称为**专用的自动化装备**。从本书的目的出发，我们将不讨论这种区别，书中的大部分内容均可应用于各种可编程机械。

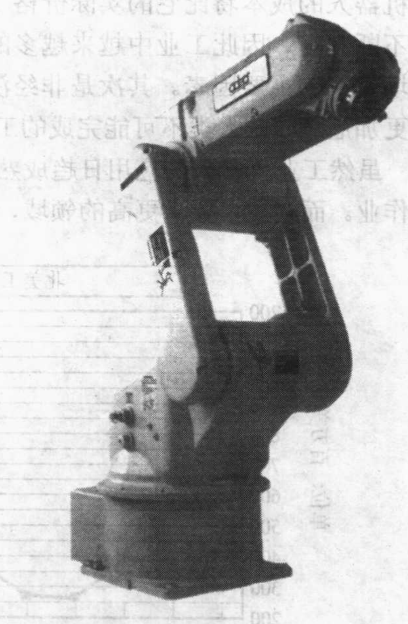


图1-4 被广泛应用的Adept 6 机械手有6个转动关节（经Adept公司许可）

一般来说，对于操作臂的机构和控制理论的研究并不是一门新的科学，它只不过是对传统学科理论的一种综合。机械工程理论为研究静态和动态环境下的操作臂提供了方法论；数学方法用于描述机械手空间运动及其特性；控制理论为实现期望运动或力提供了各种设计方法和评估算法；电气工程技术可用于传感器及工业机器

人接口的设计；计算机技术提供了执行期望任务所需的编程平台。 1~3⊖

1.2 操作臂的机构与控制

下面几节介绍一些术语，并对文章中将要涉及的一些专题进行概述。

位姿描述

在机器人研究中，我们通常在三维空间中研究物体的位置。这里所说的物体既包括操作臂的杆件、零部件和抓持工具，也包括操作臂工作空间内的其他物体。通常这些物体可用两个非常重要的特性来描述：位置和姿态。自然我们会首先研究如何用数学方法表示和计算这些参量。

为了描述空间物体的位姿，我们一般先将物体固置于一个空间坐标系，即**参考系**中，然后我们就在这个参考坐标系中研究空间物体的位置和姿态，如图1-5所示。

任一坐标系都能用作描述物体位姿的参考系，我们经常在不同参考系中变换表示物体空间位姿的形式。在第2章中，我们将研究同一物体在不同坐标系中空间位姿的描述方法和数学计算方法。

刚体位姿的研究对于机器人以外的领域也是非常有意义的。

操作臂正运动学

运动学研究物体的运动，而不考虑引起这种运动的力。在运动学中，我们研究位置、速度、加速度和位置变量对于时间或者其他变量的高阶微分。这样，操作臂运动学的研究对象就是运动的全部几何和时间特性。

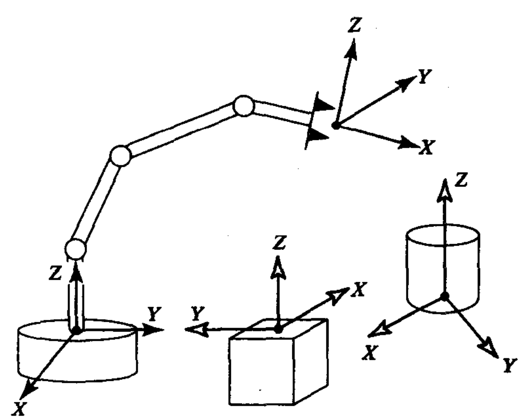


图1-5 在坐标系（参考系）中的操作臂和工作空间内的其他物体

几乎所有的操作臂都是由刚性**连杆**组成的，相邻连杆间由可作相对运动的**关节**连接。这些关节通常装有位置传感器，用来测量相邻杆件的相对位置。如果是**转动**关节，这个位移被称为**关节角**。一些操作臂含有滑动（或移动）关节，那么两个相邻连杆的位移是直线运动，有时将这个位移称为**关节偏距**。

操作臂**自由度**的数目是操作臂中具有独立位置变量的数目，这些位置变量确定了机构中所有部件的位置。自由度对所有的机构具有普遍意义。例如，四杆机构只有一个自由度（尽管它有三个可以运动的杆件）。对于一个典型的工业机器人来讲，由于操作臂大都是开式的运动链，而且每个关节位置都由一个独立的变量定义，因此关节数目等于自由度数目。

末端执行器安装在操作臂的自由端。根据机器人的不同应用场合，末端执行器可以是一个夹具、一个焊枪、一个电磁铁或是其他装置。我们通常用附着于末端执行器上的**工具坐标系**描述操作臂的位置，与工具坐标系相对应的是与操作臂固定底座相联的**基坐标系**（如图1-6所示）。

⊖ 边栏页码为英文原书页码。

在操作臂运动学的研究中一个典型的问题是操作臂**正运动学**。计算操作臂末端执行器的位置和姿态是一个静态的几何问题。具体来讲，给定一组关节角的值，正运动学问题是计算工具坐标系相对于基坐标系的位置和姿态。一般情况下，我们将这个过程称为从**关节空间**描述到**笛卡儿空间**描述的操作臂位置表示⊖。这个问题将在第3章中详细论述。

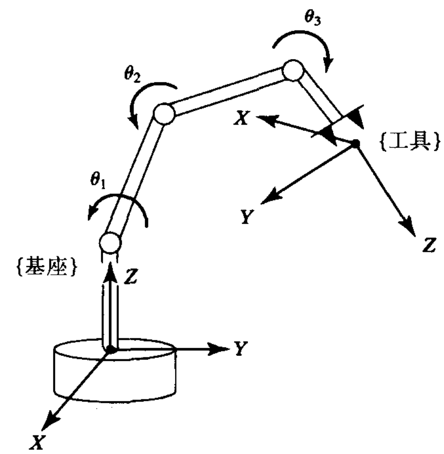


图1-6 正运动学方程描述了各个关节变量在工具坐标系与基坐标系间的函数关系

操作臂逆运动学

在第4章中，我们将讨论操作臂**逆运动学**。这个问题就是给定操作臂末端执行器的位置和姿态，计算所有可达给定位置和姿态的关节角（如图1-7所示）。这是操作臂实际应用中的一个基本问题。

这是一个相当复杂的几何问题，然而人类或其他生物系统每天都要进行数千次这样的求解。对于机器人这样一个人工智能系统，我们需要在控制计算机中生成一种算法来实现这种逆向计算。从某种程度上讲，逆运动学问题的求解对于操作臂系统来说是最重要的部分。

我们认为这是个"定位"映射问题，是将机器人位姿从三维笛卡儿空间向内部关节空间的映射。当机器人目标位置用外部三维空间坐标表示时，则需要进行这种映射。某些早期的机器人没有这种算法，它们只能简单地被移动（有时要由人工示教）到期望位置，同时记录一系列关节变量（例如各关节空间的位置和姿态）以实现再现运动。显然如果机器人只是单纯地记录和再现机器人的关节位置和运动，那么就不需要任何从关节空间到笛卡儿空间的变换算法。然而现在已经很难找到一台没有这种逆运动学算法的工业机器人。

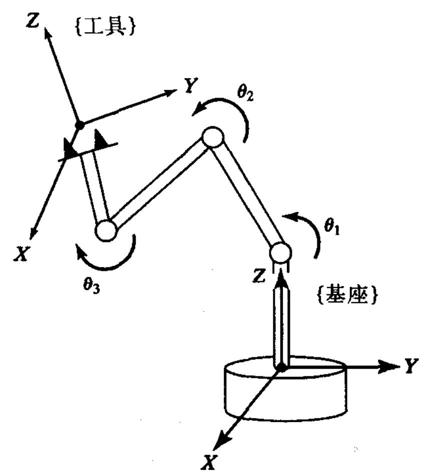


图1-7 给定工具坐标系的位置和姿态，通过逆运动学可以计算各关节变量

4~6

逆运动学不像正运动学那样简单。因为运动学方程是非线性的，因此很难得到封闭解，有时甚至无解。同时提出了解的存在性和多解问题。

上述问题的研究给人脑和神经系统在无意识的情况下引导手臂和手移动以及操作物体的现象做出了一种恰当的解释。

运动学方程解的存在与否限定了操作臂的**工作空间**。无解表示目标点处在工作空间之外，因此操作臂不能达到这个期望位姿。

⊖ 在笛卡儿坐标系中，我们用三个变量来描述空间一点的位置，而用另外三个变量描述物体的姿态。有时将此称为任务空间或操作空间。

速度，静力，奇异性

除了分析静态定位问题之外，我们还希望分析运动中的操作臂。为操作臂定义**雅可比**矩阵可以比较方便地进行机构的速度分析。雅可比矩阵定义了从关节空间速度向笛卡儿空间速度的**映射**（如图1-8所示）。这种映射关系随着操作臂位形的变化而变化。在**奇异点**雅可比矩阵是不可逆的。对这种现象的正确理解对于操作臂的设计者和用户都是十分重要的。

以第一次世界大战中坐在老式双翼飞机后座的机枪手为例（如图1-9所示）。当在前座舱中的驾驶员控制飞机飞行时，后座舱的机枪手负责射击敌人。为了完成这项任务，后座舱机枪被安装在有两个旋转自由度的机构上，这两个自由度分别被称为方位角和仰角。通过这两个运动（两个自由度），机枪手可以直接射击上半球面中任何方向的目标。

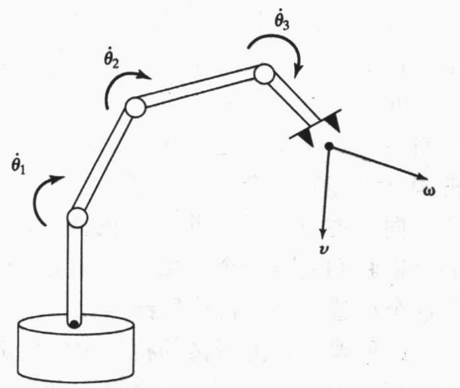


图1-8　关节速率和末端执行器速率的几何关系可以通过雅可比矩阵表示

7

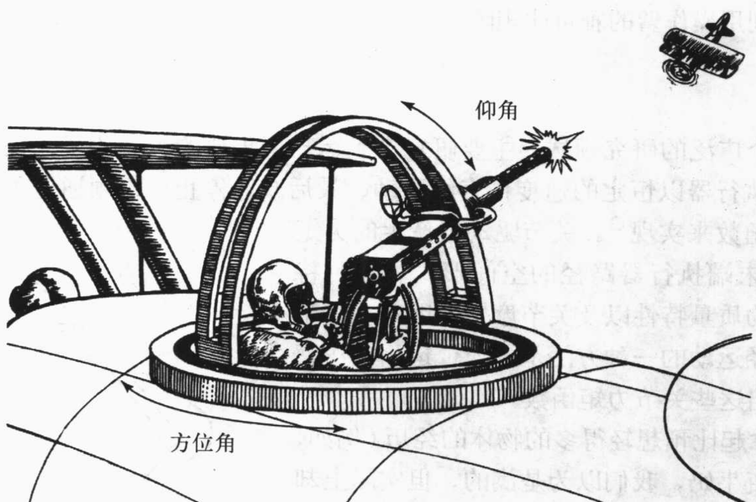


图1-9　第一次世界大战乘坐一个飞行员和一个后座舱机枪手的老式双翼飞机。这种后座舱机枪的机构受奇异点的影响

一架敌机出现在方位角15°、仰角25°的地方！机枪手瞄准敌机并向其开火，与此同时，机枪手改变机枪的方位以便尽可能长时间地向敌机连续发射子弹。他成功地击落了敌机。

另一架敌机出现在方位角15°、仰角70°的地方！机枪手瞄准敌机并开始向其开火。敌机迅速躲避，相对于机枪手的飞机仰角越来越大。很快，敌机飞过机枪手飞机的正上方。敌机为何这样做？因为这样的话,机枪手就不能够准确瞄准敌机了！机枪手发现，当敌机飞过他的正上方时，他就需要快速地改变机枪的方位角。但是他并不能以如此快速的动作改变方位角，因而致使敌机逃掉了！

最终幸运的敌机飞行员因为机枪的奇异点而获救！枪的定位机构尽管在绝大部分操作范围内都能工作良好，但当枪竖直向上或接近这种方位时，它的工作就越来越不理想。为了跟踪穿过飞机正上方的目标，机枪手就需要使枪以非常快的速度绕着方位轴转动。目标越接近于飞机正上方的位置，机枪手就需要加速使枪绕方位轴转动来跟踪目标。如果目标直接飞过枪手正上方，他就需要使枪以无穷大的速度绕方位轴转动！

机枪手应该向机构设计者抱怨这个问题吗？能设计出更好的机构来避免这个问题吗？然而回答却是这个问题并不容易避免。事实上，任何一个只有两个转动关节的两自由度的定位
8 机构都不能够避免这个问题。当机构处于这种位姿时，例如机枪竖直向上射击的情况，机枪的方向与方位角转轴共线。也就是说，当处于这点时，方位角转动改变不了机枪的方向。我们知道我们需要两个自由度来确定机枪的方位，但在这一点上，其中一个转动关节却失效了。在这个位置，这种机构**局部退化**，就像只有一个自由由度一样（仅有仰角）。

这种现象是由所谓的**机构奇异性**造成的。所有的机械装置都会有这种问题，包括机器人。正如后座舱机枪一样，这些奇异性并不影响机器人手臂在其工作空间内的定位，然而，机械臂在这些奇异点附近运动时会出现一些问题。

操作臂并不总是在工作空间内自由运动，有时也接触工件或工作面，并施加一个静力。在这种情况下的问题是一组什么样的**关节力矩**能够产生要求的接触力和力矩？为了解决这个问题，自然又要利用操作臂的雅可比矩阵。

动力学

动力学是一个广泛的研究领域，主要研究产生运动所需要的力。为了使操作臂从静止开始加速，使末端执行器以恒定的速度作直线运动，最后减速停止，必须通过关节驱动器产生一组复杂的力矩函数来实现[⊖]。关节驱动器产生的力矩函数形式取决于末端执行器路径的空间形式和瞬时特性、连杆和负载的质量特性以及关节摩擦等因素。控制操作臂沿期望路径运动的一种方法是，通过运用操作臂动力学方程求解出这些关节力矩函数。

许多人都有拿起比预想轻得多的物体的经历（例如，从冰箱中取出一瓶牛奶，我们以为是满的，但实际上却几乎是空的），这种对负载的错判可能引起异常的抓举动作。这种经验表明，人体控制系统比纯粹的运动规划更复杂。操作臂控制系统就是利用了质量以及其他动力学知识。同样，我们构造机器人操作臂运动控制的算法也应当把动力学考虑进去。

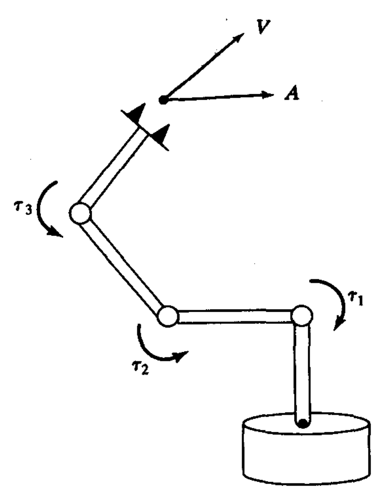


图1-10 动力学方程中驱动器的驱动力矩和操作臂运动之间关系的图示

动力学方程的第二个用途是用于**仿真**。通过重构动力学方程以便以驱动力矩函数的形式来计算加速度，这样就可以在一组驱动力矩作用下对操作臂的运动进行仿真（见图1-10）。随着计算能力的提高和计算成本的下降，仿真在许多领域得到广泛应用并且

⊖ 我们用关节驱动器作为操作臂驱动装置的通用术语，它可以是电机、气缸、液压缸和人工肌肉。

显得越来越重要。

在第6章中，我们推导了动力学方程，这些动力学方程可用于对操作臂运动的控制和仿真。

轨迹生成

平稳控制操作臂从一点运动到另外一点，通常的方法是使每个关节按照指定的时间连续函数来运动。一般情况下，操作臂各关节同时开始或同时停止运动，这样操作臂的运动才显得协调。**轨迹生成**就是如何准确计算出这些运动函数（见图1-11）。

通常，一条路径的描述不仅需要确定期望目标，而且还需要确定一些中间点或**路径点**，操作臂必须通过这条路径到达目标。有时用术语**样条函数**来表示通过一系列路径点的连续函数。

为了使末端执行器在空间中走出一条直线（或其他的几何形状），那么必须将末端执行器的期望运动转化为一系列等效的关节运动。这种**笛卡儿轨迹生成**将在第7章中讨论。

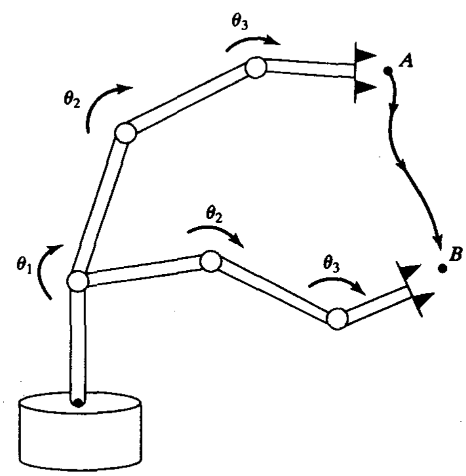


图1-11　为了使末端执行器通过空间的A点运动到B点，必须为各个关节计算一个连续运动轨迹

操作臂设计与传感器

尽管从理论上说操作臂是一种适用于多种情况的通用装置，但从经济角度考虑，操作臂的机械设计是由预期执行的任务决定的。设计者不仅要考虑诸如几何尺寸、速度以及承载能力等因素，而且还要考虑到关节的数量和它们的几何分布。这些因素影响了操作臂工作空间的大小和性质、操作臂结构的刚度以及其他性质。

机器人手臂的关节越多，机器人就越灵巧，能力越强。当然，它的制造难度也越大，造价也越高。为了设计一个实用的机器人，可采取两种方式：一种是为特定任务设计**专用机器人**，另一种是设计能够完成各种任务的**通用机器人**。对于专用机器人，仔细考虑一下就能确定需要的关节数目。比如说，一个仅用来在电路板上装配电器元件的专用机器人有四个关节就足够了。三个关节就可以使操作臂到达三维空间中的任何位置，第四个关节可以使被抓取的元件绕着垂直轴旋转。对于通用机器人，有趣的是由我们生活的现实世界的基本特性可知“合适的”最小关节数量是六个。

完整的操作臂设计还包括以下因素：驱动器的选择和配置、传动系统以及内部位置（有时是力）传感器（见图1-12）。上述问题以及其他设计问题将在第8章中讨论。

线性位置控制

一些操作臂装有步进电机或其他驱动器来直接产生所需要的轨迹。绝大多数操作臂都是由驱动器来驱动的，这些驱动器提供力或力矩来驱动连杆运动。在这种情况下，就需要一个算法来计算用于产生期望运动的力矩。动力学是设计这种算法的核心问题，但仅依靠动力学本

身并不能解决问题。设计**位置控制系统**首先需要考虑的是，自动补偿由于系统参数引起的误
9～11 差，以及抑制引起系统偏离期望轨迹的扰动。为此，通过**控制算法**对位置和速度**传感器**进行检测，以计算出驱动器的力矩指令（见图1-13）。在第9章中，我们将讨论控制算法，这些算法的综合是基于操作臂动力学的线性近似得出的。这些线性控制方法已广泛应用于工程实际中。

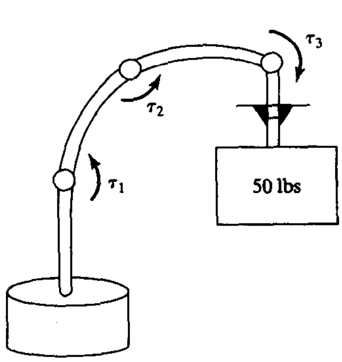


图1-12　机械操作臂的设计须解决驱动器的选择与配置、传动系统，结构刚度、传感器配置以及其他问题

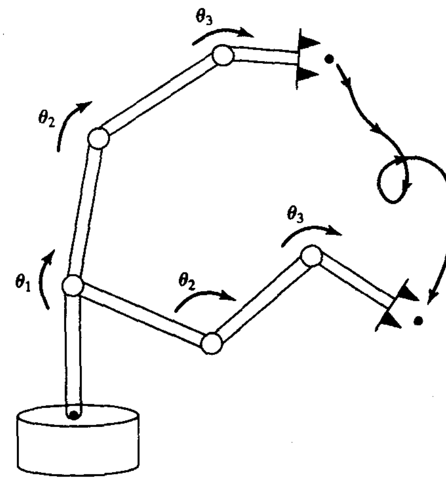


图1-13　为了使操作臂沿着期望轨迹运动，必须设计位置控制系统。这个系统通过关节传感器的反馈保持操作臂的轨迹运动

非线性位置控制

尽管基于近似线性模型的控制系统广泛应用于当前的工业机器人中，但在进行控制算法综合时，考虑操作臂完整的非线性动力学就很重要了。一些工业机器人在控制器中已经应用
12 **非线性控制**算法。操作臂的非线性控制技术比简单的线性控制方法具有更好的性能。第10章将介绍机器人的非线性控制系统。

力控制

在操作臂执行实际操作任务的过程中，当操作臂接触零件、工具或工作表面时，操作臂控制力的能力显得极其重要。**力控制**是对位置控制的补偿，因为在特定情况下，我们一般认为只有力控制或位置控制是合适的。当操作臂在自由空间中运动时，只有位置控制的概念，因为它不与任何表面接触。然而在一些应用场合，当操作臂接触刚性表面时，位置控制方法可能会在接触表面产生过大的力或者使执行器脱离接触表面。操作臂很少同时在所有方向受到作用表面的约束，因此就需要**混合**控制方式，也就是说，在某些方向用**位置控制法则**来控制，而其余方向通过**力控制法则**来控制（见图1-14）。第11章介绍了设计这种力控制方案的方法。

当用机器人擦洗窗户时，机器人应当在垂直于窗户平面的方向施加一个恒定的力，同时在平行于窗户平面的方向走出一条运动轨迹。对于这类操作任务自然会应用分离或混合控制方法。

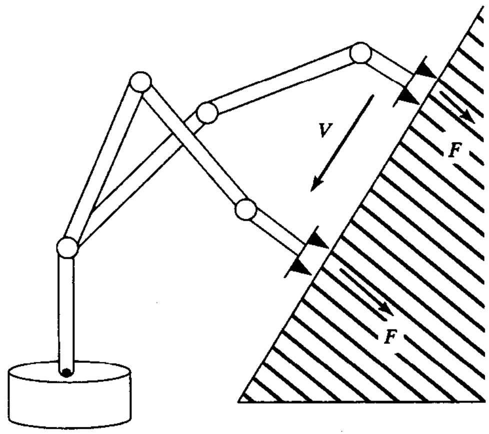


图1-14 为了使操作臂以恒力在一个表面上滑动，必须应用力－位置混合控制系统

可编程机器人

机器人编程语言是用户和工业机器人交互的接口。这样就给我们提出了一个重要问题：编程人员怎样才能容易地描述机器人的空间运动？如何给多个机器人编程以便使它们并行工作？怎样用机器人语言来描述基于传感器的运动？ 13

机器人操作臂与**专用的自动化装备**不同的是它们具有“柔性”，即可编程。不仅操作臂的运动是可编程的，而且通过传感器可以和其他的工厂自动化装备进行通信，操作臂在执行任务的过程中还能够适应各种变化（见图1-15）。

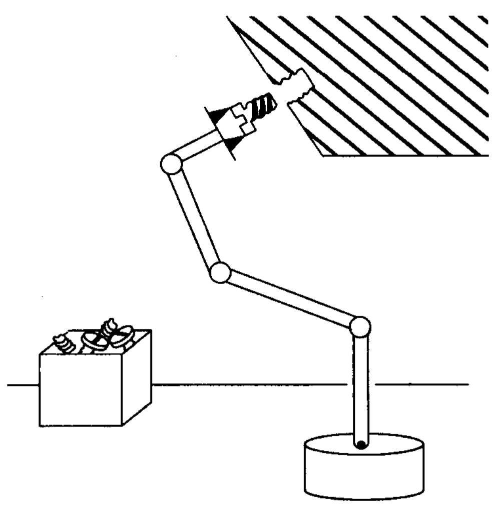


图1-15 操作臂和末端执行器的期望运动、期望的接触力以及复杂的操作方案都可以用机器人编程语言来描述

在典型的机器人系统中，操作者可以用一种快速方法来操纵机器人该走哪条路径。首先，操作者将操作臂手部上（也可以是抓持器上）的一个特殊点指定为**操作点**，有时也叫做TCP（工具中心点）。操作者可以通过操作点相对于用户坐标系的期望位置来描述机器人的运动。

通常，操作者可在某个与任务相关的位置定义与机器人基坐标系相关的参考坐标系。

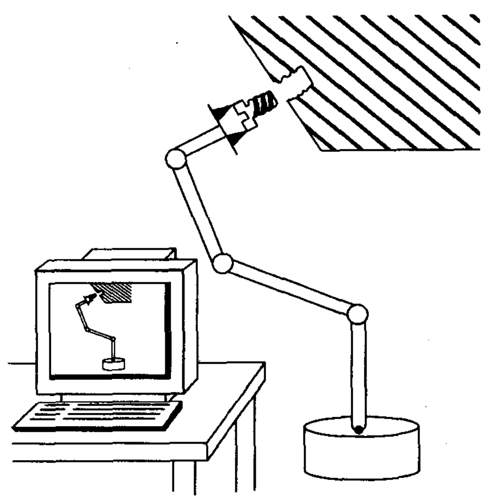
绝大多数情况下，路径是通过确定一系列的**路径点**形成的。路径点相对于参考坐标系确定，是TCP经过路径上的指定位置。操作者除了要确定这些路径点之外，还要确定不同路径段的TCP速度。有时，其他编程人员也可以指定机器人的运动（例如针对不同的光洁度标准等等）。在轨迹输入中，轨迹生成算法必须规划出机器人运动的所有细节：通过各点的速度曲
14 线、运动时间等等。因此，轨迹生成的输入问题一般是由机器人编程语言的结构决定的。

由于操作臂和其他可编程自动化设备应用于越来越多的指令化工业操作中，因此用户接口的性能变得极其重要。机器人编程的问题包含了所有“传统”计算机编程的问题，所以它本身就是个广泛的研究课题。而且，机器人编程的某些特殊问题还引发了另外的问题。其中的一些问题将在第12章中讨论。

离线编程和仿真

离线编程系统是一个机器人编程环境，这种环境通常被计算机图形学充分扩展了，在这种环境下，即使不通过机器人本身也能够对机器人进行编程。采用这种系统的好处在于，当需要对机器人编程时，离线编程系统允许生产设备（例如机器人）继续工作，因此，自动化工厂能够在大部分时间处于生产状态（见图1-16）。

离线编程系统还可以将用于产品设计阶段的计算机辅助设计（CAD）数据库与产品的实际制造之间连接起来。在某些情况下，直接使用CAD数据能够极大地减少制造过程所需的编程时间。第13章讨论了工业机器人离线编程系统的关键问题。



15 图1-16 离线编程系统通常提供了一个计算机图形学接口，允许在编程过程中不通过机器人进行编程

1.3 符号

符号是科学和工程中的一个必不可少的问题。本书中，我们作如下约定：

1. 一般大写字母的变量表示矢量或矩阵，小写字母的变量表示标量。

2. 左下标和左上标表示变量所在的坐标系。例如，${}^{A}p$ 表示坐标系{A}中的位置矢量，${}^{A}_{B}R$

是确定坐标系{A}和坐标系{B}相对关系的旋转矩阵⊖。

3. 右上标用来表示矩阵的逆或转置（比如，R^{-1}，R^{T}），这种表示已被广泛采用。

4. 右下标没有严格限制，但可以用来表示矢量的分量（例如x、y或z）或者作为一种描述——例如在P_{bolt}中，表示螺栓上的位置。

5. 我们可能会用到许多三角函数。角θ_1的余弦可以用以下任何一种形式来表示：$\cos\theta_1=c\theta_1=c_1$。

矢量可用列矢量表示，因此，行矢量的转置可以直接表示列矢量。

一般对于矢量符号表示需要说明的是：很多力学教材处理矢量时非常抽象，一般是将矢量表示成相对于不同坐标系定义的矢量。最明显的例子就是矢量的相加，可直接看出这些矢量是相对于不同参考坐标系的。这种表示方法非常方便，可以使表达式紧凑直观。以${}^0\omega_4$为例，它是串联起来的四个刚体（就像操作臂的连杆一样）中最后一个刚体相对于这个链的固定基座的角速度。由于角速度是以矢量的方式相加，所以我们可以写出一个非常简单的矢量方程来表达最后一个杆件的角速度：

$${}^0\omega_4={}^0\omega_1+{}^1\omega_2+{}^2\omega_3+{}^3\omega_4 \tag{1-1}$$

然而，这些量必须是相对于同一个坐标系的，否则它们不能够相加，所以，尽管方程（1-1）是直观的，但却隐含了许多计算工作。对于研究操作臂这种具体的例子，像方程（1-1）这样的表述是非常理想的，它隐含了记录坐标系等繁杂的工作，而这些工作实际上都是需要去做的。

因此，本书中使用的矢量符号都带有参考系信息，矢量只有在同一个坐标系下才可以相加，否则不能相加。利用这种方法，我们可以在推导时解决坐标系记录问题，并且可以直接应用于数值计算。

参考文献

[1] B. Roth, "Principles of Automation," Future Directions in Manufacturing Technology, Based on the Unilever Research and Engineering Division Symposium held at Port Sunlight, April 1983, Published by Unilever Research, UK. 16

[2] R. Brooks, "Flesh and Machines," Pantheon Books, New York, 2002.

[3] The International Federation of Robotics, and the United Nations, "World Robotics 2001," Statistics, Market Analysis, Forecasts, Case Studies and Profitability of Robot Investment, United Nations Publication, New York and Geneva, 2001.

主要参考书目

[4] R. Paul, *Robot Manipulators*, MIT Press, Cambridge, MA, 1981.

[5] M. Brady et al., *Robot Motion*, MIT Press, Cambridge, MA, 1983.

[6] W. Synder, *Industrial Robots: Computer Interfacing and Control*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1985.

[7] Y. Koren, *Robotics for Engineers*, McGraw-Hill, New York, 1985.

[8] H. Asada and J.J. Slotine, *Robot Analysis and Control*, Wiley, New York, 1986.

⊖ 这个术语将在第2章中介绍。

[9] K. Fu, R. Gonzalez, and C.S.G. Lee, *Robotics: Control, Sensing, Vision, and Intelligence*, McGraw-Hill, New York, 1987.

[10] E. Riven, *Mechanical Design of Robots*, McGraw-Hill, New York, 1988.

[11] J.C. Latombe, *Robot Motion Planning*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1991.

[12] M. Spong, *Robot Control: Dynamics, Motion Planning, and Analysis*, IEEE Press, New York, 1992.

[13] S.Y. Nof, *Handbook of Industrial Robotics*, 2nd Edition, Wiley, New York, 1999.

[14] L.W. Tsai, *Robot Analysis: The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators*, Wiley, New York, 1999.

[15] L. Sciavicco and B. Siciliano, *Modelling and Control of Robot Manipulators*, 2nd Edition, Springer-Verlag, London, 2000.

[16] G. Schmierer and R. Schraft, *Service Robots*, A.K. Peters, Natick, MA, 2000.

主要参考期刊和杂志

[17] *Robotics World.*

[18] *IEEE Transactions on Robotics and Automation.*

[19] *International Journal of Robotics Research (MIT Press).*

[20] *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control.*

[21] *International Journal of Robotics & Automation (IASTED).*

习题

1.1 [20]制做一个年表，记录在过去40年里工业机器人发展的主要事件。参见参考文献。

1.2 [20]绘制一个表格，表示工业机器人的主要应用（例如点焊、装配等）以及每个应用行业已装备机器人的使用百分比。在这张图上你能够发现需要的最新数据。见参考文献。

1.3 [40]图1-3显示了过去几年机器人成本是如何下降的。找出不同工业领域（例如汽车工业、电子装配工业以及农业等等）的劳动力成本的数据，画出一个图，比较使用人力的成本和
17 使用机器人技术的成本。你可看出不同时期各种工业领域机器人成本曲线与人力成本曲线交点的变化。当机器人技术开始显现它们在各种工业领域的应用价值时，由此图可以得出一些近似的数据。

1.4 [10]用一两句话，简述运动学、工作空间和轨迹的定义。

1.5 [10]用一两句话，简述坐标系、自由度和位置控制的定义。

1.6 [10]用一两句话，简述力控制、机器人编程语言的定义。

1.7 [10]用一两句话，简述非线性控制和离线编程的定义。

1.8 [20]绘制一个图表，表达出在过去的20年里人力成本是如何上升的。

1.9 [20]绘制一个图表，表达出在过去的20年里计算机的性价比是如何提高的。

1.10 [20]绘制一个图表，表达出工业机器人的主要用户（例如航空和汽车业等等）以及每个行业已装备机器人的使用百分比。在这张图上你能够得出需要的最新数据（参见参考文献部分）。

编程习题

熟悉一下计算机，它将用于每章结尾的编程习题。务必学会创建和编辑文件，并会编译和执行程序。

MATLAB习题

本书绝大多数章节的结尾都将给出一个MATLAB习题集。通常，这些习题要求学生在MATLAB中应用相关的机器人数学进行编程，并检查MATLAB的Robotics工具箱中的结果。本教科书认为学生已经掌握MATLAB和线性代数（矩阵理论）。同样，学生也必须逐渐掌握MATLAB的Robotics工具箱。以下是MATLAB习题。

a) 如果必要的话，熟悉一下MATLAB的编程环境。根据MATLAB软件的提示，尝试输入演示和帮助。利用颜色代码的MATLAB编辑器，学习如何创建、编辑、保存、运行和调试m—文件（一系列MATLAB语句组成的ASCII文件）。学习如何创建阵列（矩阵和向量）。学习MATLAB内部的线性代数函数，这些函数可用于矩阵和向量求积运算、点乘、叉乘、转置、行列式和求逆，也可以求解线性方程组。MATLAB是基于C语言的，但使用起来比C语言更容易。学习如何应用MATLAB编制逻辑结构和循环结构的程序。学习如何使用子程序和函数。学习如何使用注释符（%）对你编写的程序进行注释以及如何使用助记符来增强程序的可读性. 可以登录www.mathworks.com获得更多的信息和指导。MATLAB的高级用户应当熟悉MATLAB的图形接口Simulink，也应该熟悉Symbolic工具箱。

b) 熟悉一下MATLAB的Robotics工具箱，这是由澳大利亚Pinjarra Hills的联邦科学与工业研究组织的Peter I. Corke编写的第三部工具箱。这个产品可以从www.cat.csiro. au/cmst/staff/pic/robot免费下载。它的源代码是可读和可修改的。有一个国际用户团体，你可通过robot-toolbox@lists.msa.cmst.csiro.au进行联系。下载MATLAB的Robotics工具箱，使用 *.zip*文件按照指令安装在你的计算机上。阅读README文件，熟悉一下提供给用户的各种函数。找到*robot.pdf*文件，这是个用户手册，它介绍了背景知识和工具箱所有函数的详细用法。如果你不了解这些函数的用途，可不必担心，它们是用来 18
解决本书第2章到第7章所有机器人数学问题的。

第2章　空间描述和变换

2.1　概述

机器人操作的定义是指通过某种机构使零件和工具在空间运动。这自然就需要表达零件、工具以及机构本身的位置和姿态。为了定义和运用表达位姿的数学量，我们必须定义坐标系并给出表达的规则。我们这里提出了许多关于位姿的描述，这些描述作为我们以后表达线速度和角速度、力和力矩的基础。

我们采用这样一个体系，即存在着一个**世界坐标系**，我们讨论任何问题都能够参照这个坐标系。我们定义的位姿都是参照世界坐标系或者由世界坐标系定义的（或能够定义的）的笛卡儿坐标系。

2.2　描述：位置、姿态与坐标系

描述可用来确定一个操作系统处理的各种对象的特性。这些对象包括零件、工具和操作
19 臂本身。在本节中，我们将讨论位姿的描述以及包含这两个描述的统一体：坐标系。

位置描述

一旦建立了坐标系，我们就能用一个3 × 1的**位置矢量**对世界坐标系中的任何点进行定位。因为经常在世界坐标系中还要定义许多坐标系，因此必须在位置矢量上附加一信息，表明是在哪一个坐标系被定义的。在本书，位置矢量用一个前置的上标来表明其参考的坐标系（除非在文中已明确说明）——例如，${}^{A}P$。这表明${}^{A}P$的数值是由沿着坐标轴$\{A\}$的距离表示的。每个沿着坐标轴的距离都可被认为是矢量在相应坐标轴上的投影。

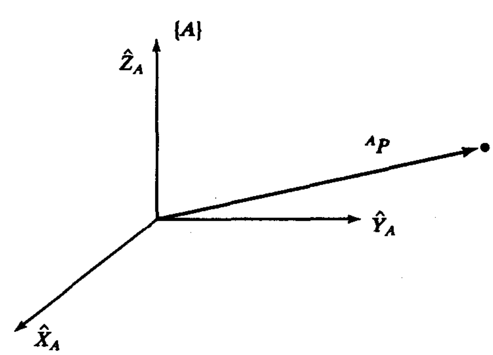


图2-1　相对于坐标系的矢量（示例）

图2-1用三个相互正交的带有箭头的单位矢量来表示一个坐标系$\{A\}$。用一个矢量来表示一个点${}^{A}P$，并且可等价地被认为是空间的一个位置，或者简单地用一组有序的三个数字来表示。矢量的各个元素用下标x，y和z来标明：

$$
{}^{A}P=\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \tag{2-1}
$$

总之，我们用一个位置矢量来描述空间中点的位置。其他空间点位置的3维描述，例如球

坐标或柱坐标表示将放在本章结尾的习题中讨论。

姿态描述

我们发现不仅经常需要表示空间的点，还经常需要描述空间中物体的**姿态**。例如，如果在图2-2中矢量^AP直接确定了在操作手指端之间的某点，只有当手的姿态已知后，手的位置才能完全被确定下来。假定操作手有足够数量的关节㊀，则操作手可有任意的姿态，而该点在指端之间的位置可保持不变。为了描述物体的姿态，我们将在物体上固定一个坐标系并且给出此坐标系相对于参考系的表达。在图2-2中，已知坐标系$\{B\}$以某种方式固定在物体上。$\{B\}$相对于$\{A\}$中的描述就足以表示出物体的姿态。

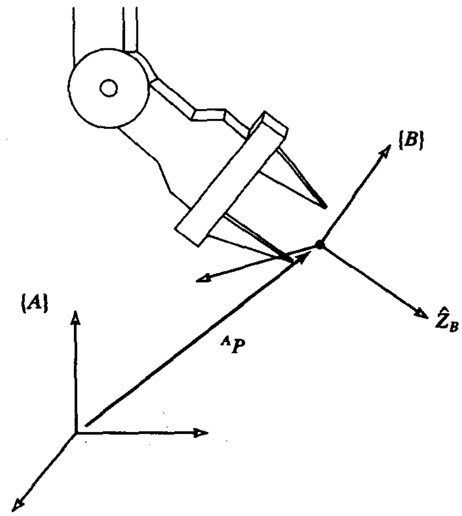


图2-2 物体位置和姿态的确定

因此，点的位置可用矢量描述，物体的姿态可用固定在物体上的坐标系来描述。描述连体坐标系$\{B\}$的一种方法是利用坐标系$\{A\}$的三个主轴单位矢量㊁来表示。

我们用 $\hat{X}_B, \hat{Y}_B$ 和 $\hat{Z}_B$ 来表示坐标系$\{B\}$主轴方向的单位矢量。当用坐标系$\{A\}$的坐标表达时，它们被写成$^A\hat{X}_B$, $^A\hat{Y}_B$ 和$^A\hat{Z}_B$。我们很容易将这三个单位矢量按照$^A\hat{X}_B$, $^A\hat{Y}_B$，$^A\hat{Z}_B$ 的顺序排列组成一个3 × 3的矩阵，我们称这个矩阵为**旋转矩阵**，并且由于这个特殊旋转矩阵是$\{B\}$相对于$\{A\}$的表达，所以我们用符号 ^A_BR 来表示（下一节将进一步说明旋转矩阵中左上标和左下标的选择方法）:

$$^A_BR=[^A\hat{X}_B\ ^A\hat{Y}_B\ ^A\hat{Z}_B]=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \tag{2-2}$$

总之，一组三个矢量可以用来确定一个姿态。简单起见，我们用三个矢量作为矩阵的列来构造一个3 × 3的矩阵。于是，点的位置可用一个矢量来表示，物体的姿态可用一个矩阵来表示。 20~21
在2.8节，我们将讨论另外一些只需要三个参数的姿态描述方法。

在式（2-2）中，标量r_{ij} 可用每个矢量在其参考坐标系中单位方向上投影的分量来表示。于是，式（2-2）中 ^A_BR的各个分量可用一对单位矢量的点积来表示:

$$^A_BR=[^A\hat{X}_B\ ^A\hat{Y}_B\ ^A\hat{Z}_B]=\begin{bmatrix} \hat{X}_B\cdot\hat{X}_A & \hat{Y}_B\cdot\hat{X}_A & \hat{Z}_B\cdot\hat{X}_A \\ \hat{X}_B\cdot\hat{Y}_A & \hat{Y}_B\cdot\hat{Y}_A & \hat{Z}_B\cdot\hat{Y}_A \\ \hat{X}_B\cdot\hat{Z}_A & \hat{Y}_B\cdot\hat{Z}_A & \hat{Z}_B\cdot\hat{Z}_A \end{bmatrix} \tag{2-3}$$

㊀ 多少关节为“足够”将在第3章和第4章讨论。

㊁ 尽管有两个主轴单位矢量可能就够了，但一般常使用三个主轴单位矢量（第三个主轴单位矢量可由已知的两个主轴单位矢量叉乘得到）。

为简单起见，式（2-3）中最右边矩阵内的前置上标被省略了。事实上，只要点积的各对矢量是在同一个坐标系中描述的，那么坐标系的选择可以是任意的。由两个单位矢量的点积可得到二者之间夹角的余弦，因此你就可以明白为什么旋转矩阵的各分量常被称作**方向余弦**了。

进一步观察式（2-3），可以看出矩阵的行是单位矢量$\{A\}$在$\{B\}$中的表达；即，

$$ {}^{A}_{B}R=[{}^{A}\hat{X}_{B}\ {}^{A}\hat{Y}_{B}\ {}^{A}\hat{Z}_{B}]=\begin{bmatrix} {}^{B}\hat{X}_{A}^{T} \\ {}^{B}\hat{Y}_{A}^{T} \\ {}^{B}\hat{Z}_{A}^{T} \end{bmatrix} \tag{2-4}$$

因此，${}^{B}_{A}R$ 为坐标系$\{A\}$相对于$\{B\}$的描述，可由式（2-3）的转置得到；即，

$$ {}^{B}_{A}R={}^{A}_{B}R^{T} \tag{2-5}$$

这表明旋转矩阵的逆矩阵等于它的转置，可以简单证明如下：

$$ {}^{A}_{B}R^{T}\,{}^{A}_{B}R=\begin{bmatrix} {}^{A}\hat{X}_{B}^{T} \\ {}^{A}\hat{Y}_{B}^{T} \\ {}^{A}\hat{Z}_{B}^{T} \end{bmatrix}[{}^{A}\hat{X}_{B}\ {}^{A}\hat{Y}_{B}\ {}^{A}\hat{Z}_{B}]=I_{3} \tag{2-6}$$

其中，I_3是3×3的单位矩阵。因此，

$$ {}^{A}_{B}R={}^{B}_{A}R^{-1}={}^{B}_{A}R^{T} \tag{2-7}$$

实际上，由线性代数[1]，我们知道一个正交阵的逆等于它的转置。我们已经在几何上证明了这一点。

坐标系的描述

完整描述图2-2中的操作手位姿所需的信息为位置和姿态。我们可在物体上任选一点描述
22 其位置，为方便起见，将其作为连体坐标系的原点。在机器人学中，位置和姿态经常成对出现，于是我们将此组合称作**坐标系**，四个矢量为一组，表示了位置和姿态信息。例如，在图2-2中，一个矢量表示指端位置，而另外三个矢量表示姿态。一个坐标系可以等价地用一个位置矢量和一个旋转矩阵来描述。注意到参考系是一个坐标系，在这个坐标系中除了姿态，还有一个位置矢量，它可以确定这个坐标系的原点相对于其他嵌入坐标系的位置。例如，用 ${}^{A}_{B}R$ 和 ${}^{A}P_{BORG}$ 来描述坐标系$\{B\}$，其中 ${}^{A}P_{BORG}$ 是确定坐标系$\{B\}$的原点的位置矢量：

$$ \{B\}=\{{}^{A}_{B}R,{}^{A}P_{BORG}\} \tag{2-8}$$

在图2-3中，在世界坐标系中有三个坐标系。已知坐标系$\{A\}$和$\{B\}$相对于世界坐标系的关系以及坐标系$\{C\}$相对于坐标系$\{A\}$的关系。

在图2-3中，我们引入坐标系的图形表示，以便于用图示说明坐标系。坐标系可用三个标有箭头的单位矢量定义的坐标系的主轴来描述。从原点到另一点的箭头表示了一个矢量。这个矢量表示了箭头处的原点相对于箭尾所在坐标系的位置。例如在图2-3中，箭头方向表示$\{C\}$相对于$\{A\}$的关系而不是$\{A\}$相对于$\{C\}$的关系。

总之，一个参考系可以用一个坐标系相对于另一坐标系的关系来描述。参考系包括了位

置和姿态两个概念，大多数情况下被认为是这两个概念的结合。位置可由一个参考系表示，这个参考系中的旋转矩阵是单位阵，并且这个参考系中的位置矢量确定了被描述点的位置。同样，如果参考系中的位置矢量是零矢量，那么它表示的就是姿态。

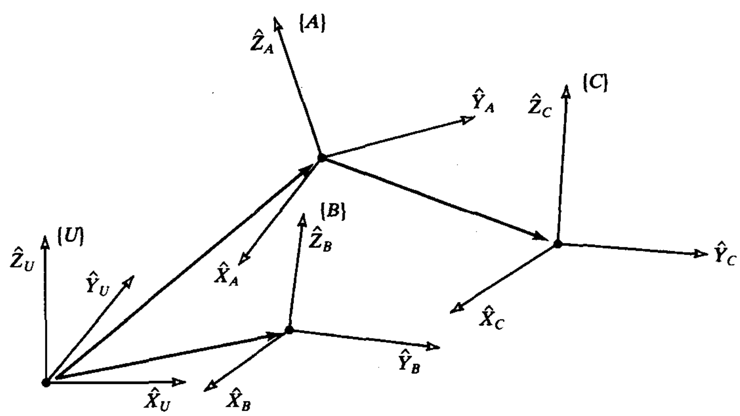


图2-3 几个坐标系举例

23

2.3 映射：从坐标系到坐标系的变换

在机器人学的许多问题中，需要用不同的参考坐标系来表达同一个量。在上节中介绍了位置、姿态和坐标系的描述方法；现在为了描述从一个坐标系到另一坐标系的变换，我们讨论**映射**的数学方法。

关于平移坐标系的映射

在图2-4中，我们用矢量 ^BP 表示位置。当$\{A\}$与$\{B\}$的姿态相同时，我们希望以坐标系$\{A\}$来表达这个空间点。在这种情况下，$\{B\}$不同于$\{A\}$的只是*平移*，可用矢量 $^AP_{BORG}$ 表示$\{B\}$的原点相对于$\{A\}$的位置。

因为两个矢量所在的坐标系具有相同的姿态，所以我们用矢量相加的方法求点P相对$\{A\}$的表示 ^AP：

$$^AP={}^BP+{}^AP_{BORG} \tag{2-9}$$

注意，不同坐标系中的矢量只有在坐标系的姿态相同这种特殊情况时才可以相加。

这个简单例子说明了如何将一个矢量从一个坐标系**映射**到另一个坐标系。映射的概念，即描述一个坐标系到另一坐标系的变换，是非常重要的概念。这个点本身（这里指空间某点）没有改变，只是它的描述改变了。图2-4中由 ^BP 表示的点没有平移，而是保持不动，但我们给出该点一个新的描述，不过这是相对于坐标系$\{A\}$的。

我们说矢量 $^AP_{BORG}$ 定义了这个映射，因为 $^AP_{BORG}$ 包含了所有进行变换所需的信息（已知这些坐标系具有相同的姿态）。

关于旋转坐标系的映射

2.2节介绍了用连体坐标系主轴的三个单位矢量来描述姿态的方法。为方便起见，我们将

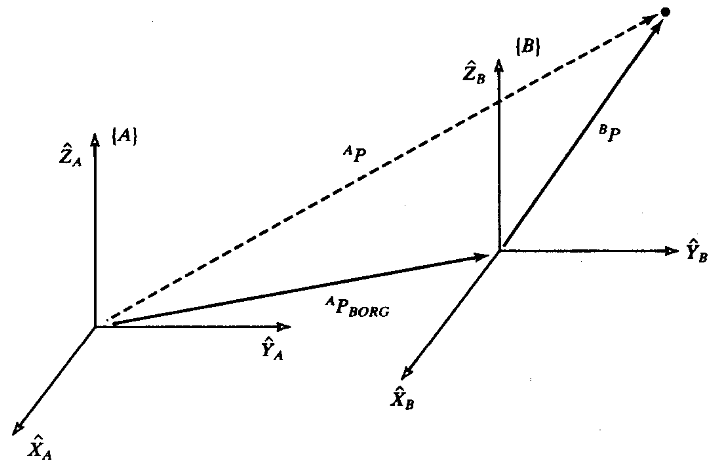


图2-4 平移映射

三个单位矢量排列在一起形成一个3 × 3的矩阵的列，我们称此矩阵为旋转矩阵。如果这个旋转矩阵专门是指{B}相对于{A}的描述，我们用符号 ${}^A_BR$ 来表示。

注意，根据上述定义，旋转矩阵各列的模均为1，并且这些单位矢量相互正交。如前所述，可得:

$$ {}^A_BR={}^B_AR^{-1}={}^B_AR^T \tag{2-10}$$

从而，由于 ${}^A_BR$ 的列是{B}的单位矢量在{A}中的描述，所以 ${}^A_BR$ 的行是{A}的单位矢量在{B}中的描述。

那么一个旋转矩阵即为三个一组的列向量或三个一组的行向量，即:

$$ {}^A_BR=[{}^A\hat{X}_B \; {}^A\hat{Y}_B \; {}^A\hat{Z}_B]=\begin{bmatrix} {}^B\hat{X}_A^T \\ {}^B\hat{Y}_A^T \\ {}^B\hat{Z}_A^T \end{bmatrix} \tag{2-11}$$

我们已知矢量相对于某坐标系{B}的定义，现在想求矢量相对另一个坐标系{A}的定义，且这两个坐标系的原点重合，这种情况是经常出现的，如图2-5所示。如果{B}相对于{A}的姿态描述是已知的，那么这个计算是可能的。这个姿态可由旋转矩阵 ${}^A_BR$ 来描述，它的各列为{B}的单位矢量在{A}中的描述。

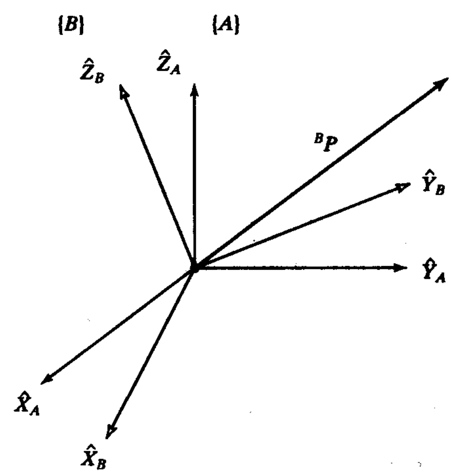


图2-5 矢量的旋转

为了计算 ^AP，我们注意到任一矢量的分量就是该矢量在参考系上单位矢量方向的投影。投影是由矢量点积计算的。因此，我们可知 ^AP 的分量计算如下:

$$\begin{aligned} {}^Ap_x&={}^B\hat{X}_A\cdot{}^BP \\ {}^Ap_y&={}^B\hat{Y}_A\cdot{}^BP \\ {}^Ap_z&={}^B\hat{Z}_A\cdot{}^BP \end{aligned} \tag{2-12}$$

为了用旋转矩阵相乘表示式（2-12），由式（2-11）可知 ${}^{A}_{B}R$ 的行就是 ${}^{B}\hat{X}_{A}$，${}^{B}\hat{Y}_{A}$ 和 ${}^{B}\hat{Z}_{A}$，那么可利用旋转矩阵将式（2-12）写成简化形式：

$$ {}^{A}P={}^{A}_{B}R\,{}^{B}P \tag{2-13} $$

式（2-13）进行了一个映射——它改变了矢量的描述——将空间某点相对于$\{B\}$的描述 ${}^{B}P$ 转换成了该点相对于$\{A\}$的描述 ${}^{A}P$。

可以看出这种符号表示有助于跟踪映射过程和坐标系的变化。可看出引入符号的好处是用这个左下标正好消掉了后面变量的左上标，例如式（2-13）中的B。

例2.1

图2-6表示坐标系$\{B\}$相对于坐标系$\{A\}$绕$\hat{Z}$轴旋转30度。这里$\hat{Z}$轴指向为由纸面向外。

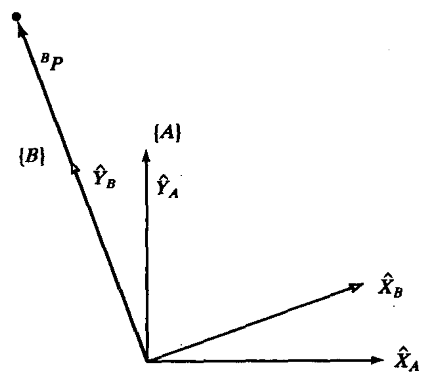


图2-6 $\{B\}$绕$\hat{Z}$轴旋转30度

24
~
26

在$\{A\}$中写出$\{B\}$的单位矢量，并且将它们按列组成旋转矩阵，得到：

$$ {}^{A}_{B}R=\begin{bmatrix}0.866 & -0.500 & 0.000\\ 0.500 & 0.866 & 0.000\\ 0.000 & 0.000 & 1.000\end{bmatrix} \tag{2-14} $$

已知：

$$ {}^{B}P=\begin{bmatrix}0.0\\ 2.0\\ 0.0\end{bmatrix} \tag{2-15} $$

求出 ${}^{A}P$：

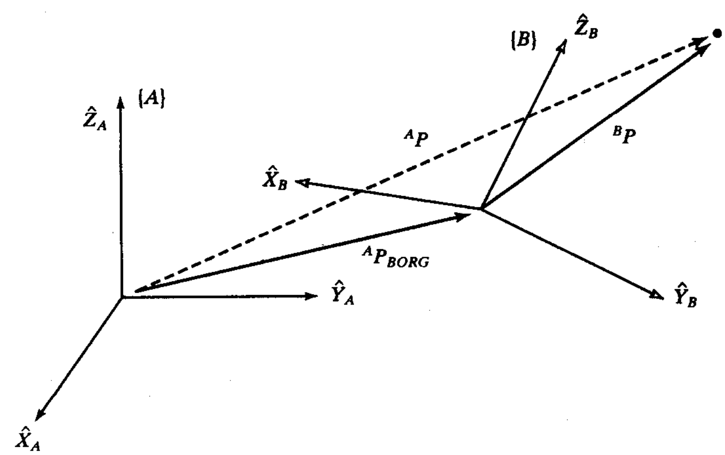
$$ {}^{A}P={}^{A}_{B}R\,{}^{B}P=\begin{bmatrix}-1.000\\ 1.732\\ 0.000\end{bmatrix} \tag{2-16} $$

这里，${}^{A}_{B}R$ 的作用是将相对于坐标系$\{A\}$描述的 ${}^{B}P$ 映射到 ${}^{A}P$。当引入这个变换时，重要的是要记住：从映射的角度看，原矢量P在空间并没有改变，我们只不过求出了这个矢量相对于另一个坐标系的新的描述。

■

关于一般坐标系的映射

经常有这种情况，我们已知矢量相对某坐标系{B}的描述，并且想求出它相对于另一个坐标系{A}的描述。现在考虑映射的一般情况。此时，坐标系{B}的原点和坐标系{A}的原点不重合，有一个矢量偏移。确定{B}原点的矢量用 ${}^{A}P_{BORG}$ 表示，同时{B}相对{A}的旋转用 ${}^{A}_{B}R$ 描述。${}^{B}P$ 已知，求 ${}^{A}P$，如图2-7所示。



27

图2-7 在一般情况下的矢量变换

首先将 ${}^{B}P$ 变换到一个中间坐标系，这个坐标系和{A}的姿态相同、原点和{B}的原点重合。这可以像上一节中那样由左乘矩阵 ${}^{A}_{B}R$ 得到。然后仍用简单的矢量加法将原点平移，并得到：

$${}^{A}P={}^{A}_{B}R\,{}^{B}P+{}^{A}P_{BORG} \tag{2-17}$$

式（2-17）表示了将一个矢量描述从一个坐标系变换到另一个坐标系矢量的一般变换映射。注意式（2-17）中的符号：消掉了B的矢量符号，剩下了所有在A中的矢量符号，然后这些量才可以相加。

由式（2-17）引出一个新的概念形式：

$${}^{A}P={}^{A}_{B}T\,{}^{B}P \tag{2-18}$$

即用一个矩阵形式的算子表示从一个坐标系到另一个坐标系的映射。这比式（2-17）表达更简洁，概念更明确。为了用式（2-18）的矩阵算子的形式写出式（2-17）的数学表达式，定义一个4×4的矩阵算子并使用了4×1位置矢量，这样式（2-18）就成为：

$$\begin{bmatrix} {}^{A}P \\ 1 \end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c|c} {}^{A}_{B}R & {}^{A}P_{BORG} \\ \hline 0\;0\;0 & 1 \end{array}\right]\begin{bmatrix} {}^{B}P \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2-19}$$

换而言之，

1. 在4×1矢量中增加的最后一个分量为“1”；
2. 在4×4矩阵中增加的最后一行为“[0 0 0 1]”。

习惯上把位置矢量当作3×1或4×1的矢量，这取决于它是与3×3还是4×4的矩阵相乘。容易看出式（2-19）可写成：

$$\begin{aligned}{}^{A}P&={}_{B}^{A}R\,{}^{B}P+{}^{A}P_{BORG}\\1&=1\end{aligned}\tag{2-20}$$

式（2-19）中的4 × 4矩阵被称为**齐次变换矩阵**。它完全可以被看作是用一个简单的矩阵形式表示了一般变换的旋转和位移。在其他研究领域，它可被用于进行投影和比例运算（当最后一行不是“[0 0 0 1]”或者旋转矩阵不是正交阵时）。有兴趣的读者可参见[2]。

因为在文中很明显，所以常写成式（2-18）的形式，而不用任何符号注明它是齐次变换。注意，尽管简洁形式的齐次变换很有用，但在计算机程序中一般不用它来进行矢量变换，因为这个变换把时间消耗在1、0的乘法运算上。因此，这种形式主要是便于公式推导。 28

正如用旋转矩阵定义姿态一样，我们将用变换（常用齐次变换）来定义一个坐标系。注意，尽管我们已经在映射中引入齐次变换，但它们仍可用于坐标系的描述。坐标系$\{B\}$相对于坐标系$\{A\}$的变换描述为${}_{B}^{A}T$。

例2.2

图2-8表示了一个坐标系$\{B\}$，它绕坐标系$\{A\}$的$\hat{Z}$轴旋转了30度，沿$\hat{X}_A$平移10个单位，再沿$\hat{Y}_A$平移5个单位。已知${}^{B}P=[3.0\ 7.0\ 0.0]^T$，求${}^{A}P$。

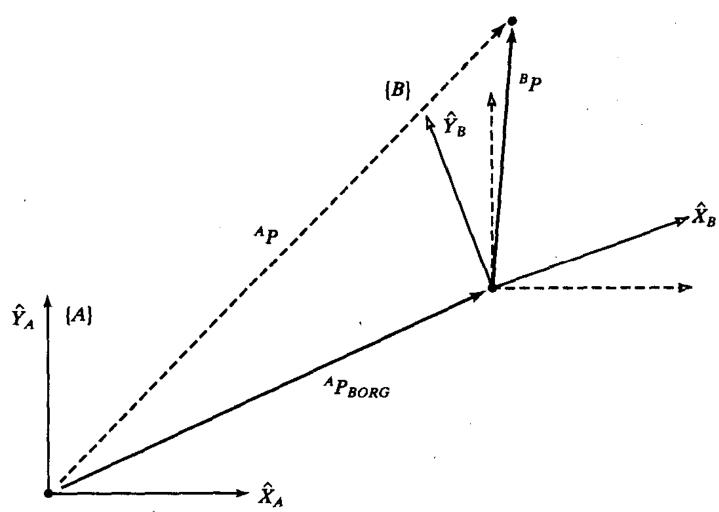


图2-8 经平移和旋转的坐标系$\{B\}$

坐标系$\{B\}$的定义为

$${}_{B}^{A}T=\begin{bmatrix}0.866 & -0.500 & 0.000 & 10.0\\0.500 & 0.866 & 0.000 & 5.0\\0.000 & 0.000 & 1.000 & 0.0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\tag{2-21}$$

已知

$${}^{B}P=\begin{bmatrix}3.0\\7.0\\0.0\end{bmatrix}\tag{2-22}$$

按照{B}的定义和已知条件进行变换:

$$^{A}P={}^{A}_{B}T\,^{B}P=\begin{bmatrix}9.098\\12.562\\0.000\end{bmatrix} \tag{2-23}$$

29

2.4 算子：平移、旋转和变换

用于坐标系间点的映射的通用数学表达式称为算子，包括点的平移算子、矢量旋转算子和平移加旋转的算子。本节对已给出的数学描述进行说明。

平移算子

平移将空间中的一个点沿着一个已知的矢量方向移动一定距离。对空间一点实际平移的描述仅与一个坐标系有关。空间中点的平移与此点向另一个坐标系的映射具有相同的数学描述，因此弄清楚映射的数学意义是非常重要的。这个区别很简单：当一个矢量相对于一个坐标系“向前移动”时，既可以认为是矢量“向前移动”，也可以认为坐标系“向后移动”，二者的数学表达式是相同的，只不过是观察位置不同。图2-9表示矢量 $^{A}P_1$ 怎样通过矢量 ^{A}Q 进行平移。这里，矢量 ^{A}Q 给出了进行平移的信息。

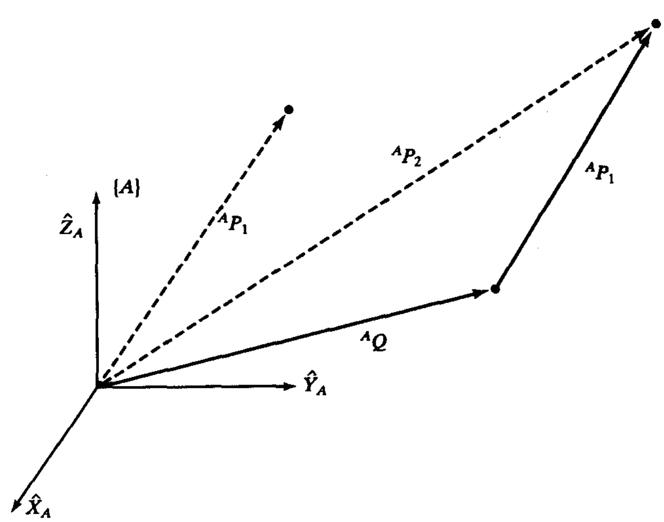


图2-9 平移算子

运算的结果是得到一个新的矢量 $^{A}P_2$，计算如下:

$$^{A}P_2={}^{A}P_1+{}^{A}Q \tag{2-24}$$

用矩阵算子写出平移变换，有:

$$^{A}P_2=D_Q(q)\,^{A}P_1 \tag{2-25}$$

30 式中，q是沿矢量 $\hat{Q}$ 方向平移的数量，它是有符号的。算子D_Q可被看成是一个特殊形式的齐次变换:

$$D_Q(q)=\begin{bmatrix}1&0&0&q_x\\0&1&0&q_y\\0&0&1&q_z\\0&0&0&1\end{bmatrix} \tag{2-26}$$

式中q_x、q_y和q_z是平移矢量Q的分量，并且 $q=\sqrt{q_x^2+q_y^2+q_z^2}$。式（2-9）和式（2-24）的数学表达式相同。注意，如果在图2-4已定义了 ${}^BP_{AORG}$（而不是 ${}^AP_{AORG}$）并应用在式（2-9）中，那么在式（2-9）和式（2-24）之间就会有符号的变化。此符号的变化说明了是矢量“向前”移动还是坐标系“向后”移动。通过定义$\{B\}$相对于$\{A\}$的位置（用 ${}^AP_{BORG}$），使得这两个描述具有相同的数学表达式。现在已引入了符号D_Q，我们就可以用它来描述坐标系和映射。

旋转算子

旋转矩阵还可以用*旋转变换算子*来定义，它将一个矢量 ${}^AP_1$ 用旋转R变换成一个新的矢量 ${}^AP_2$。通常，当一个旋转矩阵作为算子时，就无需写出下标或上标，因为它不涉及两个坐标系。因此可写成：

$${}^AP_2=R\,{}^AP_1 \tag{2-27}$$

同平移的情况一样，式（2-13）和式（2-27）的数学表达形式相同，只是意义不同。为此我们能够知道*如何得出*作为算子的旋转矩阵：

矢量经某一旋转R得到的旋转矩阵与一个坐标系相对于参考坐标系经某一旋转R得到的旋转矩阵是相同的。

尽管将旋转矩阵看作为一个算子是很简单的，但是我们将用另一个符号定义旋转算子以明确地说明是绕哪个轴旋转的：

$${}^AP_2=R_K(\theta)\,{}^AP_1 \tag{2-28}$$

符号“$R_K(\theta)$”是一个旋转算子，它表示绕$\hat{K}$轴旋转θ角度。可将这个算子写成齐次变换矩阵，其中位置矢量的分量为零。例如，代入到式（2-11）可得到绕$\hat{Z}$轴旋转θ的算子：

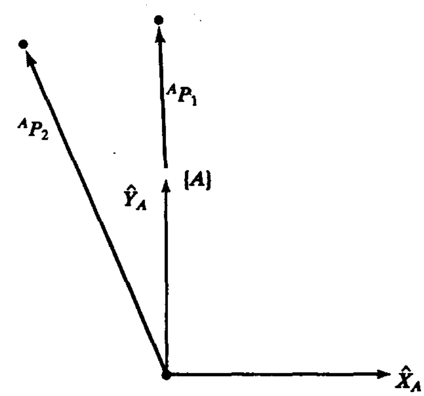


图2-10 矢量 ${}^AP_1$ 绕 $\hat{Z}$ 轴旋转30度

$$R_z(\Theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta&0&0\\\sin\theta&\cos\theta&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} \tag{2-29}$$

当然，位置矢量也可以用3 × 3旋转矩阵的齐次变换子阵进行旋转。因此符号“R_K”可看作是3 × 3或4 × 4矩阵。在本章后面，我们将看到如何写出一个绕广义轴$\hat{K}$旋转的旋转矩阵。

例2.3

图2-10给出一个矢量 ${}^AP_1$。计算绕$\hat{Z}$轴旋转30度得到的新矢量 ${}^AP_2$。

将矢量绕 $\hat{Z}$ 轴旋转30度得到的旋转矩阵与一个坐标系相对于参考坐标系绕 $\hat{Z}$ 轴旋转30度得到的旋转矩阵是相同的。因此，正确的旋转算子是

$$R_z(30.0)=\begin{bmatrix}0.866 & -0.500 & 0.000\\0.500 & 0.866 & 0.000\\0.000 & 0.000 & 1.000\end{bmatrix} \tag{2-30}$$

已知

$$^{A}P_1=\begin{bmatrix}0.0\\2.0\\0.0\end{bmatrix} \tag{2-31}$$

求得 $^{A}P_2$ 为

$$^{A}P_2=R_z(30.0)\,^{A}P_1=\begin{bmatrix}-1.000\\1.732\\0.000\end{bmatrix} \tag{2-32}$$

式（2-13）和式（2-27）使用了相同的数学表达式。注意，如果在式（2-13）已定义了 $^{B}_{A}R$（而
31~32 不是 $^{A}_{B}R$），那么R的逆可由式（2-27）得到。这个变化说明了矢量“向前”旋转还是坐标系“向后”旋转之间的差别。通过定义$\{B\}$相对于$\{A\}$的位置（用 $^{A}_{B}R$），使得两个变换的数学意义是相同的。

变换算子

与矢量和旋转矩阵一样，坐标系还可以用变换算子来定义。在这个定义中，只涉及到一个坐标系，所以符号T没有上下标。算子T将一个矢量 $^{A}P_1$ 平移并旋转得到一个新的矢量：

$$^{A}P_2=T\,^{A}P_1 \tag{2-33}$$

和旋转的情况一样，式（2-18）和式（2-33）的数学描述是相同的，只是意义不同。为此我们能够知道如何得到作为算子的齐次变换矩阵：

经旋转R和平移Q的齐次变换矩阵与一个坐标系相对于参考坐标系经旋转R和平移Q的齐次变换矩阵是相同的。

一个变换通常被认为是由一个广义旋转矩阵和位置矢量分量组成的齐次变换的形式。

例2.4

图2-11给出一个矢量 $^{A}P_1$。将其绕 $\hat{Z}$ 旋转30度并沿 $\hat{X}_A$ 平移10个单位，沿 $\hat{Y}_A$ 平移5个单位。已知 $^{A}P_1=[3.0\ \ 7.0\ \ 0.0]^T$，求 $^{A}P_2$。

进行平移和旋转的算子T为：

$$T=\begin{bmatrix}0.866 & -0.500 & 0.000 & 10.0\\0.500 & 0.866 & 0.000 & 5.0\\0.000 & 0.000 & 1.000 & 0.0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{2-34}$$

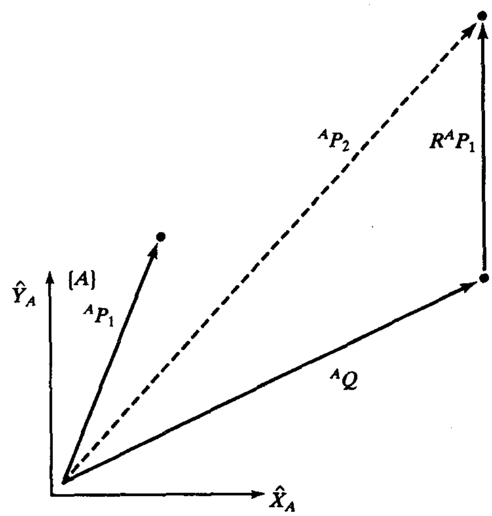


图2-11 矢量 $^AP_1$ 经旋转和平移得到 $^AP_2$

33

已知

$$^AP_1=\begin{bmatrix}3.0\\7.0\\0.0\end{bmatrix} \tag{2-35}$$

将T看作算子:

$$^AP_2=T\,^AP_1=\begin{bmatrix}9.098\\12.562\\0.000\end{bmatrix} \tag{2-36}$$

注意此例的结果在数值上与例2.2相同，但意义不同。

2.5 总结和说明

我们首先介绍了平移的概念，然后介绍了旋转的概念，最后介绍了旋转和平移的一般情况。在理解了旋转和平移这种一般情况后，就无需将这两种简单情况分开了，因为它们已被包括在一个一般体系中了。

介绍了一个包括姿态和位置信息的4 × 4齐次变换矩阵，作为表示坐标系的一般工具。

我们给出了齐次变换阵的三个定义:

1. 它是坐标系的描述。^A_BT 表示相对于坐标系$\{A\}$的坐标系$\{B\}$。特别是，^A_BR 的各列是坐标系$\{B\}$主轴方向上的单位矢量，$^AP_{BORG}$ 确定了$\{B\}$的原点。

2. 它是变换映射。^A_BT 是映射 $^BP\to{}^AP$ 。

3. 它是变换算子。T将 $^AP_1$ 变换为 $^AP_2$ 。

由此可见，坐标系和变换都可用位置矢量加上姿态来描述。一般来说坐标系主要是用于描述，而变换常用来表示映射或算子。变换是平移和旋转的组合（和蕴含）；但有时在纯旋

转（或纯平移）情况下也常用变换这个术语。

2.6 变换算法

本节介绍变换的乘法和变换的逆运算。这两个基本运算组成了一套功能完备的变换算子。

混合变换

34 在图2-12中，已知 ^{C}P，求 ^{A}P 。

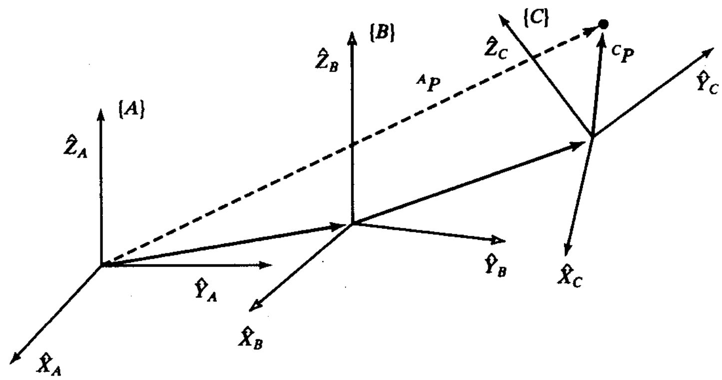


图2-12 混合坐标系：每个坐标系相对于前一个坐标系是已知的

已知坐标系$\{C\}$相对于坐标系$\{B\}$，并且已知坐标系$\{B\}$相对于坐标系$\{A\}$。将 ^{C}P 变换成 ^{B}P：

$$^{B}P={}^{B}_{C}T\,^{C}P \tag{2-37}$$

然后将 ^{B}P 变换成 ^{A}P

$$^{A}P={}^{A}_{B}T\,^{B}P \tag{2-38}$$

联立式（2-37）和式（2-38），得到（确定解）

$$^{A}P={}^{A}_{B}T\,^{B}_{C}T\,^{C}P \tag{2-39}$$

由此定义

$$^{A}_{C}T={}^{A}_{B}T\,^{B}_{C}T \tag{2-40}$$

注意，熟练使用上下标可使运算简化。由于已知$\{B\}$和$\{C\}$的描述，因此可求得 $^{A}_{C}T$ 为

$$^{A}_{C}T=\left[\begin{array}{c|c} ^{A}_{B}R\,^{B}_{C}R & ^{A}_{B}R\,^{B}P_{CORG}+{}^{A}P_{BORG} \\ \hline 0\ 0\ 0 & 1 \end{array}\right] \tag{2-41}$$

逆变换

已知坐标系$\{B\}$相对于坐标系$\{A\}$——即 $^{A}_{B}T$ 的值已知。有时为了得到$\{A\}$相对于$\{B\}$的描述，即 $^{B}_{A}T$ ，需要求这个矩阵的逆。一个直接求逆的办法是将4 × 4齐次变换求逆。但是，这样做
35 就不能充分利用变换的性质。容易看出一个比较简单的方法是利用变换的性质求逆。

为了求 ${}^B_AT$，必须由 ${}^A_BR$ 和 ${}^AP_{BORG}$ 求出 ${}^B_AR$ 和 ${}^BP_{AORG}$。首先，回顾一下关于旋转矩阵的讨论：

$$ {}^B_AR={}^A_BR^T \tag{2-42} $$

其次利用式（2-13）将 ${}^AP_{BORG}$ 转变成在$\{B\}$中的描述：

$$ {}^B({}^AP_{BORG})={}^B_AR\,{}^AP_{BORG}+{}^BP_{AORG} \tag{2-43} $$

式（2-43）的左边应为零，由此可得：

$$ {}^BP_{AORG}=-{}^B_AR\,{}^AP_{BORG}=-{}^A_BR^T\,{}^AP_{BORG} \tag{2-44} $$

由式（2-42）和式（2-44），可写出 ${}^B_AT$：

$$ {}^B_AT=\left[\begin{array}{c|c} {}^A_BR^T & -{}^A_BR^T\,{}^AP_{BORG} \\ \hline 0\ 0\ 0 & 1 \end{array}\right] \tag{2-45} $$

注意，使用符号：

$$ {}^B_AT={}^A_BT^{-1} $$

式（2-45）是求齐次逆变换的一般且非常有用的方法。

例2.5

图2-13表示坐标系$\{B\}$绕坐标系$\{A\}$的 $\hat{Z}$ 轴旋转30度，沿 $\hat{X}_A$ 平移4个单位，沿 $\hat{Y}_A$ 平移3个单位，于是得到 ${}^A_BT$，求 ${}^B_AT$。

定义坐标系$\{B\}$：

$$ {}^A_BT=\begin{bmatrix} 0.866 & -0.500 & 0.000 & 4.0 \\ 0.500 & 0.866 & 0.000 & 3.0 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 & 0.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-46} $$

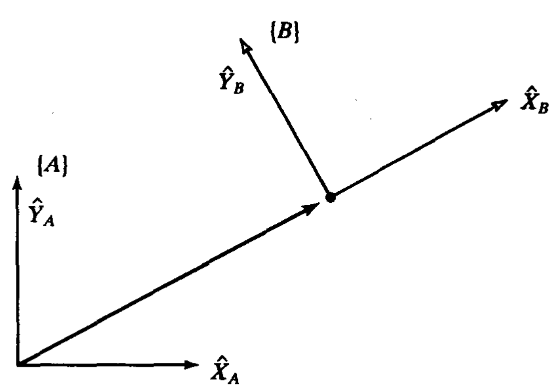


图2-13 相对于坐标系$\{A\}$的坐标系$\{B\}$ 36

应用式（2-45），得到

$$
{}^{B}_{A}T=\begin{bmatrix} 0.866 & 0.500 & 0.000 & -4.964 \\ -0.500 & 0.866 & 0.000 & -0.598 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 & 0.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-47}
$$

■

2.7 变换方程

图2-14表示坐标系{D}可以用两种不同的方式表达成变换相乘的形式。第一个，

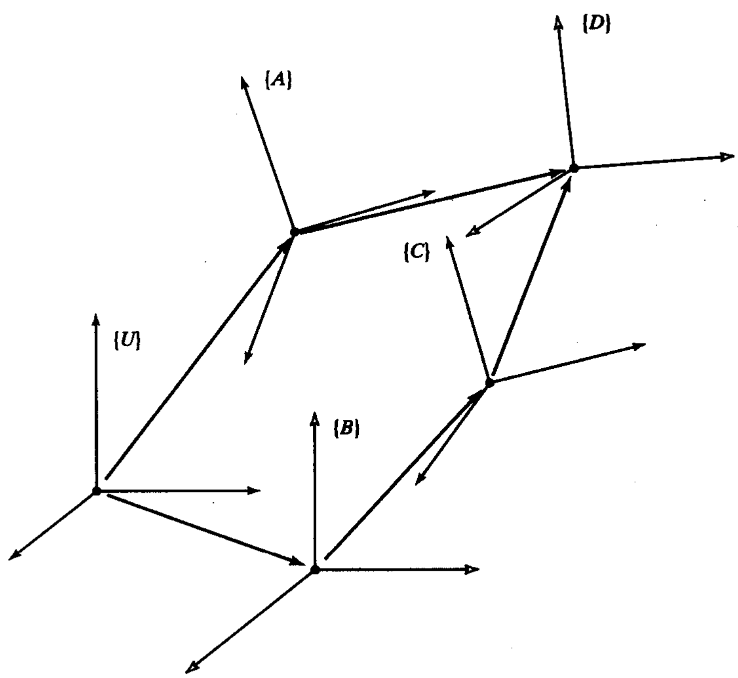
$$
{}^{U}_{D}T={}^{U}_{A}T\,{}^{A}_{D}T \tag{2-48}
$$

第二个:

$$
{}^{U}_{D}T={}^{U}_{B}T\,{}^{B}_{C}T\,{}^{C}_{D}T \tag{2-49}
$$

将两个表达式构造成一个**变换方程**

$$
{}^{U}_{A}T\,{}^{A}_{D}T={}^{U}_{B}T\,{}^{B}_{C}T\,{}^{C}_{D}T \tag{2-50}
$$



37 图2-14 形成一个闭环的变换序列

如有n个未知变换和n个变换方程，这个变换可由变换方程解出。设式（2-50）中的所有变换除了 ${}^{B}_{C}T$ 外均已知。这里，有一个变换方程和一个未知变换，很容易解出:

$$
{}^{B}_{C}T={}^{U}_{B}T^{-1}\,{}^{U}_{A}T\,{}^{A}_{D}T\,{}^{C}_{D}T^{-1} \tag{2-51}
$$

图2-15对这种情况作了说明。

注意，在所有的图中，我们均采用了坐标系的图形表示法，即用一个坐标系的原点指向

另一个坐标系的原点的箭头来表示。箭头的方向指明了坐标系定义的方式：在图2-14中，相对于$\{A\}$定义坐标系$\{D\}$；在图2-15中相对于$\{D\}$定义坐标系$\{A\}$。将箭头串连起来，通过简单的变换相乘就可得到混合坐标系。如果有一个箭头的方向与串连的方向相反，就先求出它的逆。在图2-15中，$\{C\}$的两个可能的描述为：

$$ {}^U_CT={}^U_AT\,{}^D_AT^{-1}\,{}^D_CT \tag{2-52}$$

和

$$ {}^U_CT={}^U_BT\,{}^B_CT \tag{2-53}$$

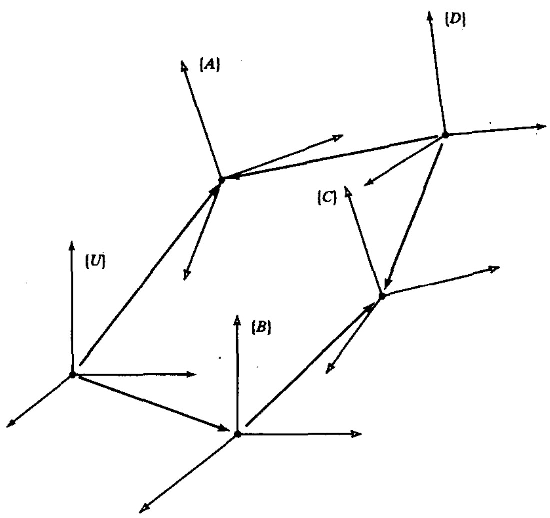


图2-15 变换方程的示例

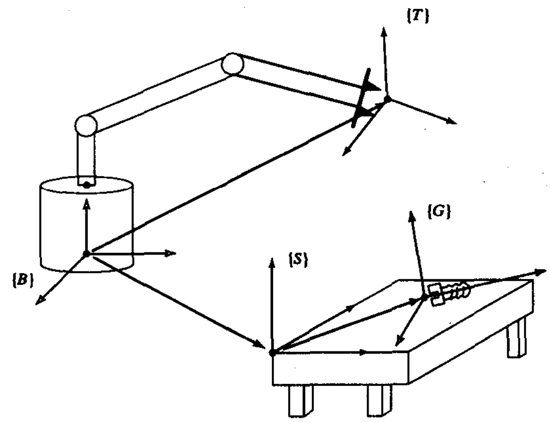


图2-16 接近一个螺栓的操作臂

还可用式（2-52）和式（2-53）解出 ${}^U_AT$

$$ {}^U_AT={}^U_BT\,{}^B_CT\,{}^D_CT^{-1}\,{}^D_AT \tag{2-54}$$

例2.6

假定已知图2-16中变换 ${}^B_TT$ 描述了操作臂指端的坐标系$\{T\}$，它是相对于操作臂基座的坐标系$\{B\}$的，又已知工作台相对于操作臂基座的空间位置（因为已知与工作台相连的坐标系$\{S\}$是 ${}^B_ST$ ），并且已知工作台上螺栓的坐标系相对于工作台坐标系的位置，即 ${}^S_GT$ 。计算螺栓相对操作手的位姿，${}^T_GT$ 。

由公式推导（按照要求和我们的理解）得到相对于操作手坐标系的螺栓坐标系为：

$$ {}^T_GT={}^B_TT^{-1}\,{}^B_ST\,{}^S_GT \tag{2-55}$$

2.8 姿态的其他描述方法

至此，只给出了3 × 3旋转矩阵来表示姿态。如上所述，旋转矩阵是一种特殊的各列相互 38~39
正交的单位阵。进一步我们知道旋转矩阵的行列式恒为+1。旋转矩阵也可被称为**标准正交矩**

阵，"标准"是指其行列式的值为+1（非标准正交矩阵的行列式值为－1）。

很自然地要问，能否用少于九个数字来表示一个姿态。线性代数的结论（已知**正交矩阵的凯莱公式**[3]）告诉我们，对于任何正交阵R，存在一个反对称矩阵S，满足

$$R=(I_3-S)^{-1}(I_3+S) \tag{2-56}$$

式中I_3是一个3 × 3单位阵。一个3维反对称阵（即$S=-S^T$）可由三个参数(s_x, s_y, s_z)表示为

$$S=\begin{bmatrix} 0 & -s_x & s_y \\ s_x & 0 & -s_x \\ -s_y & s_x & 0 \end{bmatrix} \tag{2-57}$$

因此，从式（2-56）可直接得出结论，任何3 × 3旋转阵可用三个参量确定。

显然，旋转矩阵的九个分量线性相关。实际上，对于一个旋转矩阵R很容易写出六个线性无关的分量。如上所述，假定R为三列:

$$R=[\hat{X}\ \hat{Y}\ \hat{Z}] \tag{2-58}$$

由2.2节可知，这三个矢量是参考坐标系中某坐标系的单位轴。每个矢量都是单位矢量，且相互垂直，所以9个矩阵元素有6个约束:

$$\begin{gathered} |\hat{X}|=1 \\ |\hat{Y}|=1 \\ |\hat{Z}|=1 \\ \hat{X}\cdot\hat{Y}=0 \\ \hat{X}\cdot\hat{Z}=0 \\ \hat{Y}\cdot\hat{Z}=0 \end{gathered} \tag{2-59}$$

自然要问是否能找到这样一种姿态表示法，用三个参量就能简便地进行表达。本节将给出几个姿态表示法。

沿着三个相互垂直的轴的平移运动比较直观，而旋转似乎不太直观。然而，人们长期难以
40 在3维空间描述和定义姿态。主要困难是旋转一般不是互逆的，即 ${}^A_B R\,{}^B_C R$ 与 ${}^B_C R\,{}^A_B R$ 不同。

例2.7

考虑两个旋转，一个绕轴 $\hat{Z}$ 转30度，而另一个绕$\hat{X}$ 轴转30度:

$$R_z(30)=\begin{bmatrix} 0.866 & -0.500 & 0.000 \\ 0.500 & 0.866 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 \end{bmatrix} \tag{2-60}$$

$$R_x(30)=\begin{bmatrix} 1.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.866 & -0.500 \\ 0.000 & 0.500 & 0.866 \end{bmatrix} \tag{2-61}$$

$$R_z(30)R_x(30)=\begin{bmatrix} 0.87 & -0.43 & 0.25 \\ 0.50 & 0.75 & -0.43 \\ 0.00 & 0.50 & 0.87 \end{bmatrix}$$

$$\neq R_X(30)R_Z(30)=\begin{bmatrix}0.87 & -0.50 & 0.00\\ 0.43 & 0.75 & -0.50\\ 0.25 & 0.43 & 0.87\end{bmatrix} \tag{2-62}$$

毋庸置疑旋转的顺序是重要的，进一步说，正是因为矩阵相乘一般不满足交换律，所以用矩阵来表示旋转需要特别引起注意。

因为旋转既可被看作算子又可被看作是对姿态的描述，因此毋庸置疑对于不同的用途就有不同的表示法。旋转矩阵可作为算子，当乘以矢量时，旋转矩阵就起到旋转运算的作用。但是，用旋转矩阵来确定姿态有些不便。一个计算机终端操作员在输入一个机械手的期望姿态时，需要烦琐地输入一个九个元素的正交矩阵。而一种只需三个数的表示法就显得简便些。下节将介绍这些表示法。

X-Y-Z固定角坐标系

下面介绍描述坐标系$\{B\}$姿态的一种方法：

首先将坐标系$\{B\}$和一个已知参考坐标系$\{A\}$重合。先将$\{B\}$绕$\hat{X}_A$旋转γ角，再绕$\hat{Y}_A$旋转β角，最后绕$\hat{Z}_A$旋转α角。

每个旋转都是绕着固定参考坐标系$\{A\}$的轴。我们规定这种姿态的表示法为**X-Y-Z固定角坐标系**。“固定”一词是指旋转是在固定（即不运动的）参考坐标系（图2-17）中确定的。有时把它们定义为**回转角**、**俯仰角和偏转角**。但是使用中应注意，因为这个定义经常与其他定义不同的问题相关。 41

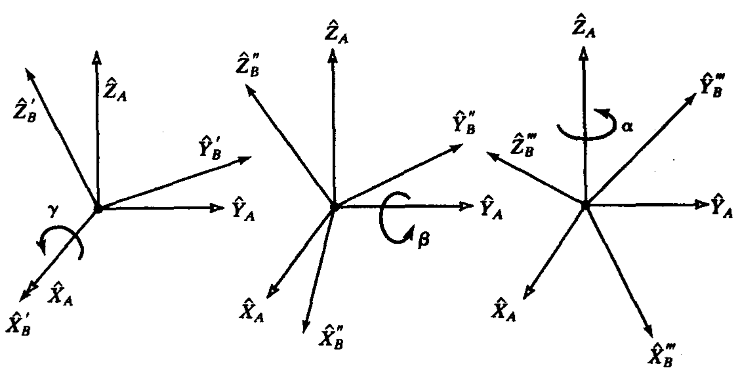


图2-17 X-Y-Z固定角坐标系，按照$R_X(\gamma)$，$R_Y(\beta)$，$R_Z(\alpha)$的顺序进行旋转

可直接推导等价旋转矩阵${}^A_BR_{XYZ}(\gamma,\beta,\alpha)$，因为所有的旋转都是绕着参考坐标系各轴的；即

$${}^A_BR_{XYZ}(\gamma,\beta,\alpha)=R_Z(\alpha)R_Y(\beta)R_X(\gamma)$$
$$=\begin{bmatrix}c\alpha & -s\alpha & 0\\ s\alpha & c\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c\beta & 0 & s\beta\\ 0 & 1 & 0\\ -s\beta & 0 & c\beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & c\gamma & -s\gamma\\ 0 & s\gamma & c\gamma\end{bmatrix} \tag{2-63}$$

式中$c\alpha$是$\cos\alpha$的简写，$s\alpha$是$\sin\alpha$的简写等等。最重要的是要搞清楚式（2-63）中的旋转顺序。

将旋转看作算子依次进行旋转（从右开始），先进行旋转$R_X(\gamma)$，再作旋转$R_Y(\beta)$，最后作旋转$R_z(\alpha)$。由式（2-63）的乘积得：

$$
{}^A_BR_{XYZ}(\gamma,\beta,\alpha)=\begin{bmatrix} c\alpha c\beta & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma \\ s\alpha c\beta & s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma \\ -s\beta & c\beta s\gamma & c\beta c\gamma \end{bmatrix} \tag{2-64}
$$

要记住这里给定的三个旋转顺序，仅当旋转是按照这个顺序进行时方程（2-64）才是正确的，即绕$\hat{X}_A$旋转γ，绕$\hat{Y}_A$旋转β，绕$\hat{Z}_A$旋转α。

常使人感兴趣的是逆解问题，即从一个旋转矩阵等价推出X-Y-Z固定角坐标系。逆解取决于求解一组超越方程：如果方程（2-64）相当于一个已知的旋转矩阵，那么就有九个方程和三个未知量。在这九个方程中有六个方程是相关的。因此实际上只有三个方程和三个未知量。令

$$
{}^A_BR_{XYZ}(\gamma,\beta,\alpha)=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \tag{2-65}
$$

由方程（2-64），通过计算r_{11}和r_{21}的平方和的平方根，可求得$\cos\beta$。然后用$-r_{31}$除以$\cos\beta$再求
42 其反正切可求得β。那么，只要$c\beta\neq 0$，就可以用$r_{21}/c\beta$除以$r_{11}/c\beta$得到α角，用$r_{32}/c\beta$除以$r_{33}/c\beta$得到γ角。

即

$$
\begin{aligned}
\beta &= \mathrm{A}\tan 2(-r_{31}, \sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2}) \\
\alpha &= \mathrm{A}\tan 2(r_{21}/c\beta, r_{11}/c\beta) \\
\gamma &= \mathrm{A}\tan 2(r_{32}/c\beta, r_{33}/c\beta)
\end{aligned} \tag{2-66}
$$

式中Atan2(y, x)是一个双参变量的反正切函数⊖。

虽然存在第二个解，但在上式中取β的正根以得到单解，满足$-90^\circ<\beta<90^\circ$。这样就可以在各种姿态表示法之间定义一一对应的映射函数。但是在某些情况下，有必要求出所有的解（详见第4章）。如果$\beta=\pm 90.0^\circ$（即$c\beta=0$），式（2-67）的解就退化了。在这种情况下，仅能求出α和γ的和或差。在这种情况下一般取$\alpha=0.0$，结果如下。

如$\beta=90.0^\circ$，解得：

$$
\begin{aligned}
\beta &= 90.0^\circ \\
\alpha &= 0.0 \\
\gamma &= \mathrm{A}\tan 2(r_{12}, r_{22})
\end{aligned} \tag{2-67}
$$

如果$\beta=-90.0^\circ$，解得：

⊖ Atan2(y, x)计算$\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$时，可根据x和y的符号可判别求得的角所在的象限。例如，Atan2（-2.0，-2.0）$=-135^\circ$，而Atan2（2.0，2.0）$=45^\circ$，一个反正切函数的解可能被丢失。我们经常在360°的范围内计算角度，因此一般应用Atan2函数。注意，当两个解都是0时，Atan2成为不定的。有时称它为“4象限反正切”，一些编程语言库中对其作了预定义。

$$\beta = -90.0°$$
$$\alpha = 0.0 \qquad (2\text{-}68)$$
$$\gamma = -\mathrm{A}\tan 2(r_{12}, r_{22})$$

Z-Y-X欧拉角

坐标系$\{B\}$的另一种表示法如下:

首先将坐标系$\{B\}$和一个已知参考坐标系$\{A\}$重合。先将$\{B\}$绕$\hat{Z}_B$旋转α角，再绕$\hat{Y}_B$旋转β角，最后绕$\hat{X}_B$旋转γ角。

在这种表示法中，每次都是绕运动坐标系$\{B\}$的各轴旋转而不是绕固定坐标系$\{A\}$的各轴旋转。 43

这样三个一组的旋转被称作**欧拉角**。注意每次旋转所绕的轴的方位取决于上次的旋转。由于三个旋转分别是绕着$\hat{Z}, \hat{Y}$和$\hat{X}$，所以称这种表示法为**Z-Y-X欧拉角**。

图2-18表示每次进行欧拉角变换后坐标系$\{B\}$的轴。绕$\hat{Z}$轴旋转α角使$\hat{X}$旋转到$\hat{X}'$，$\hat{Y}$旋转到$\hat{Y}'$等等。每次旋转得到的轴被附加一个“撇号”。由Z-Y-X欧拉角参数化的旋转矩阵用${}^A_BR_{Z'Y'X'}(\alpha, \beta, \gamma)$表示。注意下标上附加“撇号”表明这是用欧拉角描述的旋转。

参见图2-18，用中间坐标系$\{B'\}$和$\{B''\}$来表达${}^A_BR_{Z'Y'X'}(\alpha, \beta, \gamma)$。如果把这些旋转看成是坐标系的描述，就可立即写出:

$${}^A_BR = {}^A_{B'}R\,{}^{B'}_{B''}R\,{}^{B''}_{B}R \qquad (2\text{-}69)$$

式（2-69）右边的每个旋转描述都是按照Z-Y-X欧拉角的定义给出的。即$\{B\}$相对于$\{A\}$的最终姿态为:

$$\begin{aligned}{}^A_BR_{Z'Y'X'} &= R_Z(\alpha)\,R_Y(\beta)R_X(\gamma)\\ &=\begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0\\ s\alpha & c\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta\\ 0 & 1 & 0\\ -s\beta & 0 & c\beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & c\gamma & -s\gamma\\ 0 & s\gamma & c\gamma\end{bmatrix}\end{aligned} \qquad (2\text{-}70)$$

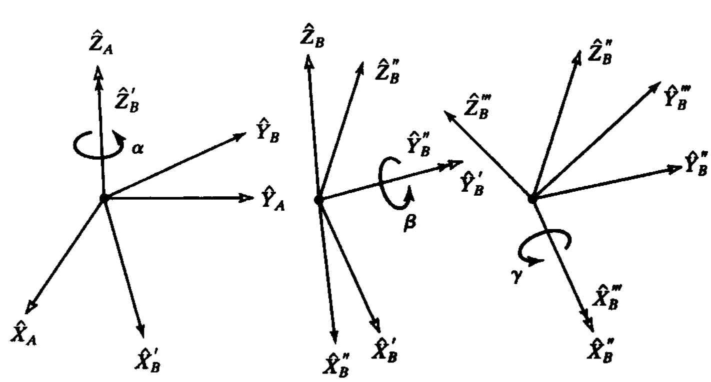


图2-18 Z-Y-X欧拉角

式中$c\alpha=\cos\alpha$，$s\alpha=\sin\alpha$ 等等。相乘后，得

$$
{}^{A}_{B}R_{Z'Y'X'}(\alpha,\beta,\gamma)=\begin{bmatrix} c\alpha c\beta & c\alpha s\beta s\gamma-s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta c\gamma+s\alpha s\gamma \\ s\alpha c\beta & s\alpha s\beta s\gamma+c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta c\gamma-c\alpha s\gamma \\ -s\beta & c\beta s\gamma & c\beta c\gamma \end{bmatrix} \tag{2-71}
$$

44 注意这个结果与以相反顺序绕固定轴旋转三次得到的结果完全相同！总之，这是一个不太直观的结果：三次绕固定轴旋转的最终姿态和以相反顺序三次绕运动坐标轴旋转的最终姿态相同。

因为式（2-71）和式（2-64）等价，所以无需通过旋转矩阵的反复计算去求Z-Y-X欧拉角。也就是说，式（2-66）也可用来求解同一个已知旋转矩阵的Z-Y-X欧拉角。

Z-Y-Z欧拉角

坐标系$\{B\}$的另一种表示法如下：

首先将坐标系$\{B\}$和一个已知参考坐标系$\{A\}$重合。先将$\{B\}$绕$\hat{Z}_B$旋转α角，再绕$\hat{Y}_B$旋转β角，最后绕$\hat{Z}_B$旋转γ角。

相对于运动坐标系$\{B\}$的旋转描述是一个欧拉角描述。因为三个旋转是依次绕$\hat{Z}$，$\hat{Y}$和$\hat{Z}$，所以称此描述为**Z-Y-Z欧拉角**。

按照上一节的推导，可得到等效矩阵

$$
{}^{A}_{B}R_{Z'Y'Z'}(\alpha,\beta,\gamma)=\begin{bmatrix} c\alpha c\beta c\gamma-s\alpha s\gamma & -c\alpha c\beta s\gamma-s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta \\ s\alpha c\beta c\gamma+c\alpha s\gamma & -s\alpha c\beta s\gamma+c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta \\ -s\beta c\gamma & s\beta s\gamma & c\beta \end{bmatrix} \tag{2-72}
$$

从旋转矩阵得出Z-Y-Z欧拉角介绍如下。

已知

$$
{}^{A}_{B}R_{Z'Y'Z'}(\alpha,\beta,\gamma)=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \tag{2-73}
$$

如$\sin\beta\neq 0$，可得到

$$
\begin{aligned}
\beta &= \operatorname{A\tan 2}\left(\sqrt{r_{31}^2+r_{32}^2}, r_{33}\right) \\
\alpha &= \operatorname{A\tan 2}(r_{23}/s\beta, r_{13}/s\beta) \\
\gamma &= \operatorname{A\tan 2}(r_{32}/s\beta, -r_{31}/s\beta)
\end{aligned} \tag{2-74}
$$

虽然存在第二个解（在式中取β的正平方根），但我们总是求满足$0.0<\beta<180.0°$的单解。如果$\beta=0.0$或$180.0°$，式（2-74）的解就退化了。在这种情况下，仅能求出α和γ的和或差。在这种情况下，一般取$\alpha=0.0$，结果如下。

如果$\beta=0.0$，则解为

$$
\begin{aligned}
\beta &= 0.0 \\
\alpha &= 0.0 \\
\gamma &= \operatorname{A\tan 2}(-r_{12}, r_{11})
\end{aligned} \tag{2-75}
$$

45

如$\beta=180.0°$，则解为

$$\begin{aligned}\beta &= 180.0^\circ \\ \alpha &= 0.0 \\ \gamma &= \mathrm{A}\tan 2(r_{12}, -r_{11})\end{aligned} \tag{2-76}$$

其他角坐标系的表示法

在前一小节中，已经介绍了三种表示姿态的惯用方法：X-Y-Z固定角、Z-Y-X欧拉角和Z-Y-Z欧拉角。每个表示法均需要按一定顺序进行三次绕主轴的旋转。这些表示法是24种表示法中的典型方法，且都被称作**角坐标系表示法**。其中，12种为固定角坐标系法，另12种为欧拉角坐标系法。注意到由于二者的对偶性，对于绕主轴连续旋转的旋转矩阵实际上只有12种唯一的参数表示法。没有特别的理由优先采用何种表示法，不同研究者可以采用不同的表示法，所以把所有24种表示法的等效旋转矩阵列出来是有用的。附录B（在本书后面）给出了所有24种表示法的等效旋转矩阵。

等效轴角坐标系表示法

符号$R_X(30.0)$表示绕一个给定轴$\hat{X}$旋转30度的方位。这是一个**等效轴角坐标表示法**的例子。如果轴的方向是一般方向（而不是主轴方向），任何方位都可通过选择适当的轴和角度来得到。坐标系$\{B\}$的表达如下：

首先将坐标系$\{B\}$和一个已知参考坐标系$\{A\}$重合。将$\{B\}$绕矢量${}^A\hat{K}$按右手定则旋转θ角。

矢量$\hat{K}$有时被称为有限旋转的等效轴。$\{B\}$相对于$\{A\}$的一般姿态可用${}^A_BR(\hat{K},\theta)$或$R_K(\theta)$来表示，并称作等效轴角坐标系表示法$^\ominus$。确定矢量${}^A\hat{K}$只需要两个参数，因为它的长度恒为1。角度确定了第三个参数。经常用旋转量θ乘以单位方向矢量$\hat{K}$形成一个简单的3×1的矢量来描述姿态，用K表示（没有“帽号”），见图2-19。

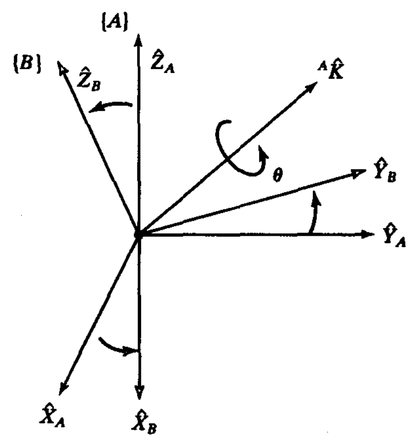


图2-19 等效轴角坐标系表示法

当选择$\{A\}$的主轴中的一个轴作为旋转轴时，则等效旋转矩阵成为我们熟悉的平面旋转矩阵：

$$R_X(\theta)=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix} \tag{2-77}$$

$$R_Y(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta\end{bmatrix} \tag{2-78}$$

⊖ 对于$\{B\}$相对于$\{A\}$的任何方位，$\hat{K}$和θ以前由欧拉参数表示，现在被称为欧拉旋量定理[3]。

$$R_Z(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{2-79}$$

如果旋转轴为一般轴，则等效旋转阵（见习题2.6）为：

$$R_K(\theta)=\begin{bmatrix}k_xk_xv\theta+c\theta & k_xk_yv\theta-k_zs\theta & k_xk_zv\theta+k_ys\theta\\ k_xk_yv\theta+k_zs\theta & k_yk_yv\theta+c\theta & k_yk_zv\theta-k_xs\theta\\ k_xk_zv\theta-k_ys\theta & k_yk_zv\theta+k_xs\theta & k_zk_zv\theta+c\theta\end{bmatrix} \tag{2-80}$$

式中，$c\theta=\cos\theta$，$s\theta=\sin\theta$，$v\theta=1-\cos\theta$，并且 ${}^A\hat{K}=[k_x,k_y,k_z]^T$。$\theta$ 的符号由右手定则确定，即大拇指指向 ${}^A\hat{K}$ 的正方向。

公式（2-80）将等效轴角坐标系表示转变成旋转矩阵表示。注意，对于任何旋转轴和任何角度，都能很容易地构造出等效旋转阵。

从一个给定的旋转矩阵求出 $\hat{K}$ 和θ，这个逆问题大部分留在习题中（习题2.6和2.7），但在此给出了一部分结果[3]。如果

$${}^A_BR_K(\theta)=\begin{bmatrix}r_{11} & r_{12} & r_{13}\\ r_{21} & r_{22} & r_{23}\\ r_{31} & r_{32} & r_{33}\end{bmatrix} \tag{2-81}$$

那么

46~47

$$\theta=\mathrm{A}\cos\left(\frac{r_{11}+r_{22}+r_{33}-1}{2}\right)$$

且

$$\hat{K}=\frac{1}{2\sin\theta}\begin{bmatrix}r_{32}-r_{33}\\ r_{13}-r_{31}\\ r_{21}-r_{12}\end{bmatrix} \tag{2-82}$$

由上式总可以计算出一个在0度到180度之间的θ值。对于任意一对轴－角 $({}^A\hat{K},\theta)$，存在另一对轴－角，即 $(-{}^A\hat{K},-\theta)$，它们在空间的姿态相同，可用同样的旋转矩阵描述。因此，在将旋转矩阵转化为等效轴角坐标系表示法时，我们需要对解进行选择。一个更加重要的问题是，对于小角度的旋转，此时的轴将变得不确定。显然，如果转动量为零，旋转轴根本无法确定。如果$\theta=0°$或180°时，式（2-82）将无解。

例2.8

坐标系$\{B\}$最初与坐标系$\{A\}$重合。我们使坐标系$\{B\}$绕矢量 ${}^A\hat{K}=[0.707\ \ 0.70\ \ 70.0]^T$（${}^A\hat{K}$ 经过原点）旋转，转角$\theta=30°$，求坐标系$\{B\}$的描述。

代入式（2-80）得到坐标系描述的旋转矩阵分量。因为原点没有改变，所以位置矢量是 $[0,0,0]^T$。因此

$$
{}^{A}_{B}T=\begin{bmatrix} 0.933 & 0.067 & 0.354 & 0.0 \\ 0.067 & 0.933 & -0.354 & 0.0 \\ -0.354 & 0.354 & 0.866 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} \tag{2-83}
$$

■

到此为止，我们讨论过的所有旋转都是绕经过参考系原点的轴进行的。如果我们遇到的问题不属于这种情况时，我们可以定义另外一个坐标系，该坐标系的原点在轴上，为此将这类问题简化为“经过原点的轴”的情况来解决，然后再求解这个变换方程。

例2.9

坐标系$\{B\}$最初与坐标系$\{A\}$重合。我们使坐标系$\{B\}$绕矢量 ${}^{A}\hat{K}=[0.707\ \ 0.707\ \ 0.0]^{T}$（此矢量经过点 ${}^{A}P=[1.0\ 2.0\ 3.0]$）旋转，转角$\theta=30°$，求坐标系$\{B\}$的描述。

在旋转之前，坐标系$\{A\}$和$\{B\}$是重合的。如图2-20所示，我们定义了两个新的坐标系$\{A'\}$和$\{B'\}$，它们互相重合，且它们分别相对于坐标系$\{A\}$和$\{B\}$具有相同的方向，但它们的原点在旋转轴上，并且相对于坐标系$\{A\}$的原点有一定的偏移量。我们选择

$$
{}^{A}_{A'}T=\begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & 2.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 3.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} \tag{2-84}
$$

48

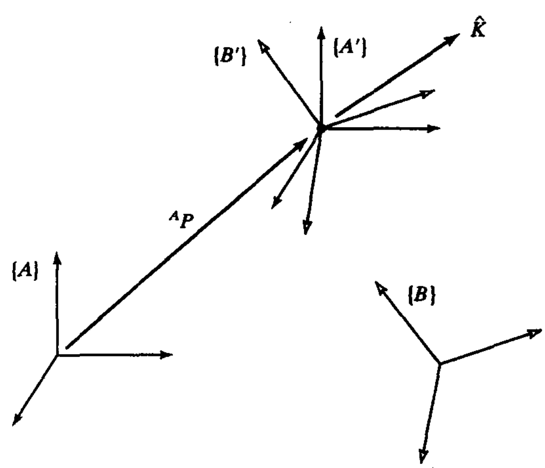


图2-20 绕不经过$\{A\}$原点的轴旋转，最初坐标系$\{A\}$与$\{B\}$重合

同样，坐标系$\{B\}$相对于坐标系$\{B'\}$的描述是

$$
{}^{B'}_{B}T=\begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & -1.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & -2.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & -3.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} \tag{2-85}
$$

现在，保持其他关系不变，使坐标系 {B′}绕坐标系{A′}旋转。因为旋转轴经过原点，所以我们可以用式（2-80）来计算坐标系 {B′}相对于坐标系 {A′}的旋转量。带入式（2-80）得到描述坐标系的旋转矩阵分量。又因为原点没有改变，所以位置矢量是[0, 0, 0,]^T。因此，我们得到

$$
{}^{A'}_{B'}T=\begin{bmatrix} 0.933 & 0.067 & 0.354 & 0.0 \\ 0.067 & 0.933 & -0.354 & 0.0 \\ -0.354 & 0.354 & 0.866 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} \tag{2-86}
$$

最后，我们可以用一个变换方程来计算要求的坐标系

$$
{}^{A}_{B}T={}^{A}_{A'}T\,{}^{A'}_{B'}T\,{}^{B'}_{B}T \tag{2-87}
$$

从而求得

$$
{}^{A}_{B}T=\begin{bmatrix} 0.933 & 0.067 & 0.354 & -1.13 \\ 0.067 & 0.933 & -0.354 & 1.13 \\ -0.354 & 0.354 & 0.866 & 0.05 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 1.00 \end{bmatrix} \tag{2-88}
$$

绕一个不通过原点的轴旋转会引起位置变化，附加上这个位置变化使得最终的姿态好像旋转
49 轴已通过原点。

注意，无论以何种方式定义的坐标系 {A′}和 {B′}，它们的原点必须选在旋转轴上。旋转轴方向的选择是任意的，而坐标系原点可以选在旋转轴的任意位置上（参见习题2.14）。■

欧拉参数

另一种姿态表示法是通过四个数值来表示的，称为**欧拉参数**。虽然完整的讨论超出了本书的范围，但在这里我们介绍一种规则作为参考。

根据等效旋转轴 $\hat{K}=[k_x\ k_y\ k_z]^T$ 和等效旋转角θ得到欧拉参数如下

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= k_x \sin\frac{\theta}{2} \\
\varepsilon_2 &= k_y \sin\frac{\theta}{2} \\
\varepsilon_3 &= k_z \sin\frac{\theta}{2} \\
\varepsilon_4 &= \cos\frac{\theta}{2}
\end{aligned} \tag{2-89}
$$

显然，这四个参数不是独立的

$$
\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2+\varepsilon_4^2=1 \tag{2-90}
$$

这个关系总是保持不变。因此，一个姿态可以看作是四维空间中单位超球面上的一点。

有时，可以将欧拉参数看作是一个3 × 1的矢量加上一个标量。但是，虽然欧拉参数是一个4 × 1的矢量，我们还是将欧拉参数看作是一个**单位四元数**。

用欧拉参数组表示的旋转矩阵R_ε是

$$R_\varepsilon=\begin{bmatrix}1-2\varepsilon_2^2-2\varepsilon_3^2 & 2(\varepsilon_1\varepsilon_2-\varepsilon_3\varepsilon_4) & 2(\varepsilon_1\varepsilon_3+\varepsilon_2\varepsilon_4)\\ 2(\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_3\varepsilon_4) & 1-2\varepsilon_1^2-2\varepsilon_3^2 & 2(\varepsilon_2\varepsilon_3-\varepsilon_1\varepsilon_4)\\ 2(\varepsilon_1\varepsilon_3-\varepsilon_2\varepsilon_4) & 2(\varepsilon_2\varepsilon_3+\varepsilon_1\varepsilon_4) & 1-2\varepsilon_1^2-2\varepsilon_2^2\end{bmatrix} \quad (2\text{-}91)$$

已知一个旋转矩阵得到对应的欧拉参数是

$$\begin{aligned}\varepsilon_1&=\frac{r_{32}-r_{23}}{4\varepsilon_4}\\ \varepsilon_2&=\frac{r_{13}-r_{31}}{4\varepsilon_4}\\ \varepsilon_3&=\frac{r_{21}-r_{12}}{4\varepsilon_4}\\ \varepsilon_4&=\frac{1}{2}\sqrt{1+r_{11}+r_{22}+r_{33}}\end{aligned} \quad (2\text{-}92)$$

50

注意，从计算的意义来讲，如果旋转矩阵表示的是绕某一轴180°的旋转，式（2-92）将失去意义，因为$\varepsilon_4=0$。但可以看出，当取极限时，式（2-92）中的所有表达式都趋向于无穷大，对于上述情况也是如此。实际上从式（2-89）的定义中可以看出，对于所有的ε_i，其值在[−1,1]间。

示教和预定义姿态运动

在许多机器人系统中，可以通过运行机器人来“示教”位置和姿态。将操作臂运行至一期望位置并将这一位置记录下来。在用这种方法示教时，机器人不必要求返回原来的坐标系，此坐标系可以是局部坐标系也可以是固定坐标系。换句话说，此时的机器人是一个具有六自由度的测量工具。这样进行姿态示教就可完全不必在编程中处理姿态描述问题。在计算机中，示教点是按照旋转矩阵形式被存储的，（然而）用户对它是不了解的。因此，尽量推荐采用机器人系统进行坐标系的示教。

除了示教坐标系外，一些机器人系统还有一系列预定义姿态运动，例如“向下点动”或“向左点动”。这些指令对用户非常方便。但是，如果这个预定义姿态运动仅对姿态进行描述和定义，那么机器人系统的应用范围就将很有限。

2.9 自由矢量的变换

在这一章中我们将重点介绍位置矢量。在后面的章节中，我们将讨论速度和力矢量。因为这些矢量的类型不同，所以它们的变换形式是不同的。

在力学中，矢量的相等和等效是有显著的区别的。如果两个矢量具有相同的维数、大小和方向时，这两个矢量就相等。两个相等的矢量可能有不同的作用线——例如图2-21中所示的三个相等的矢量。这些速度矢量具有相同的维数、大小和方向，所以按照我们的定义可知它们是相等的。

如果两个矢量在某一功能上产生了相同的作用效果，那么这两个矢量对这一特定功能来说就是等效的。因此，如果在图2-21中判别的是运行距离，这三个矢量的效果相同，那么它们在这一功能上来讲是等效的。但是，如果判断标准是在xy平面上方的高度，那么这三个矢

量是不等效的，尽管它们是相等的矢量。因此，矢量之间的关系以及是否等效完全取决于当时的判断条件。而且，在某些情况下，不相等的矢量可能会产生相同的作用效果。

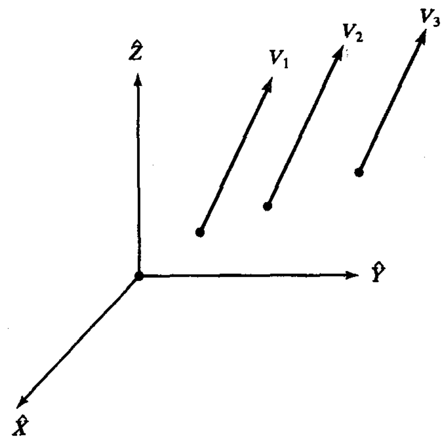


图2-21 相等的速度矢量

我们将定义两种很有用的基本矢量类型。

术语**线矢量**是指与**作用线**有关的矢量，其作用效果取决于矢量的大小和方向。通常情况下，力矢量的作用效果取决于力的作用线（或者是力的作用点），所以力矢量可以看作是线矢量。

自由矢量是指可能出现在空间任意位置的矢量，但它的性质没有改变，例如假定它的大小和方向保持不变。

例如，一纯力矩矢量就是一个自由矢量。如果已知在坐标系$\{B\}$中有一个力矩矢量 ^{B}N ，那么在坐标系$\{A\}$中计算这个力矩矢量，得

$$^{A}N={}^{A}_{B}R\,^{B}N \tag{2-93}$$

换言之，（对于自由矢量）所有的计算都是关于大小和方向的，所以在两个坐标系的变换中只与旋转矩阵有关，而原点的相对位移在计算中是不会涉及的。

同样的，在坐标系$\{B\}$中的速度矢量 ^{B}V ，在坐标系$\{A\}$中表示为

$$^{A}V={}^{A}_{B}R\,^{B}V \tag{2-94}$$

某一点的速度是自由矢量，所以对于此矢量最重要的是大小和方向。矢量旋转（如式(2-94)）不会改变矢量的大小，但从坐标系$\{B\}$到坐标系$\{A\}$的旋转完成时，矢量的描述被改变了。需要注意的是，出现在位置矢量变换中的 $^{A}P_{BORG}$ 不能出现在速度变换当中。例如，在图2-22中，如果 $^{B}V=5\hat{X}$ ，那么 $^{A}V=5\hat{Y}$ 。

速度矢量、力矢量和力矩矢量将会在第5章中作进一步介绍。

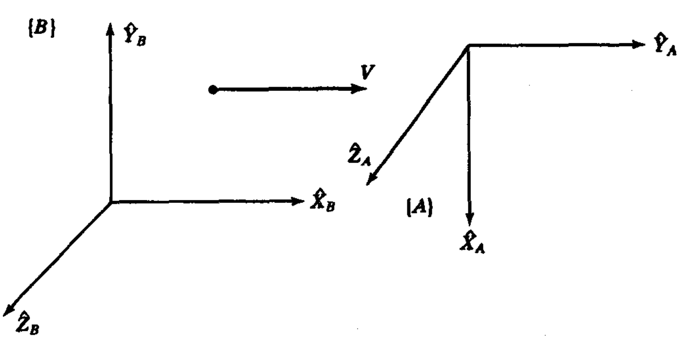


图2-22 速度变换

2.10 计算分析

计算成本的降低带来的效益极大地促进着机器人工业的发展，因此，在操作系统的设计当中，高效的计算能力将始终是一个重要的方面。

齐次变换方法对概念分析是很有用的，但是在工业操作臂系统中常用的变换软件并不直接应用这种方法，因为大量时间会耗费在0和1的乘法运算上。

通常，我们按照式（2-41）和式（2-45）进行计算，而不是直接进行乘法或对4 × 4的矩阵进行求逆运算。

当对相同的量进行计算时，变换顺序的不同将会导致计算量的很大差别。对于矢量的复合旋转

$$ {}^{A}P={}^{A}_{B}R\,{}^{B}_{C}R\,{}^{C}_{D}R\,{}^{D}P \tag{2-95}$$

一种方法是首先将这三个旋转矩阵相乘，得到 ${}^{A}_{D}R$ ，表示为

$$ {}^{A}P={}^{A}_{D}R\,{}^{D}P \tag{2-96}$$

由 ${}^{A}_{D}R$ 的三个分量来计算 ${}^{A}_{D}R$ 需要54次乘法运算和36次加法运算，而进行式（2-96）中最后的矩阵矢量乘法还要增加9次乘法运算和6次加法运算，所以总共需要63次乘法和42次加法运算。

另一种方法是逐个通过矩阵计算进行矢量变换，即

$$\begin{aligned}
{}^{A}P&={}^{A}_{B}R\,{}^{B}_{C}R\,{}^{C}_{D}R\,{}^{D}P\\
{}^{A}P&={}^{A}_{B}R\,{}^{B}_{C}R\,{}^{C}P\\
{}^{A}P&={}^{A}_{B}R\,{}^{B}P\\
{}^{A}P&={}^{A}P
\end{aligned} \tag{2-97}$$

那么总的计算次数只需要27次乘法运算和18次加法运算，与前一种方法相比所用的次数还不及一半。

当然，在某些情况下，关系式 ${}^{A}_{B}R$ ， ${}^{B}_{C}R$ 和 ${}^{C}_{D}R$ 是常数，这时主要是将 ${}^{D}P_i$ 转换为 ${}^{A}P_i$ 。在这种情况下，更有效的方法是一次性计算 ${}^{A}_{D}R$ ，然后将它用于所有需要的变换。见习题2.16。 51 ~ 53

例2.10

给出一种求两个旋转矩阵乘积 ${}^{A}_{B}R$ ${}^{B}_{C}R$ 的方法，计算次数不多于27次乘法运算和18次加法运算。

这里 $\hat{L}_i$ 是 ${}^{B}_{C}R$ 的列， $\hat{C}_i$ 分别是计算结果的三个列，计算如下、

$$\begin{aligned}
\hat{C}_1&={}^{A}_{B}R\hat{L}_i\\
\hat{C}_2&={}^{A}_{B}R\hat{L}_2\\
\hat{C}_3&=\hat{C}_1\times\hat{C}_2
\end{aligned} \tag{2-98}$$

这里只需要24次乘法和15次加法运算。

参考文献

[1] B. Noble, *Applied Linear Algebra*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1969.

[2] D. Ballard and C. Brown, *Computer Vision*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1982.

[3] O. Bottema and B. Roth, *Theoretical Kinematics*, North Holland, Amsterdam, 1979.

[4] R.P. Paul, *Robot Manipulators*, MIT Press, Cambridge, MA, 1981.

[5] I. Shames, *Engineering Mechanics*, 2nd edition, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1967.

[6] Symon, *Mechanics*, 3rd edition, Addison-Wesley, Reading, MA, 1971.

[7] B. Gorla and M. Renaud, *Robots Manipulateurs*, Cepadues-Editions, Toulouse, 1984.

习题

2.1 [15]一矢量 ${}^{A}P$ 绕 $\hat{Z}_A$ 旋转θ度，然后绕 $\hat{X}_A$ 旋转ϕ度，求按上述顺序旋转后得到的旋转矩阵。

2.2 [15] 一矢量 ${}^{A}P$ 绕 $\hat{Y}_A$ 旋转30度，然后绕 $\hat{X}_A$ 旋转45度，求按上述顺序旋转后得到的旋转矩阵。

2.3 [16] 坐标系$\{B\}$最初与坐标系$\{A\}$重合，将坐标系$\{B\}$绕 $\hat{Z}_B$ 旋转θ度，接着再将上一步旋转得到的坐标系绕 $\hat{X}_B$ 旋转ϕ度，求从 ${}^{B}P$ 到 ${}^{A}P$ 矢量变换的旋转矩阵。

2.4 [16] 坐标系$\{B\}$最初与坐标系$\{A\}$重合，将坐标系$\{B\}$绕 $\hat{Z}_B$ 旋转30度，接着再将上一步旋转得到的坐标系绕 $\hat{X}_B$ 旋转45度，求从 ${}^{B}P$ 到 ${}^{A}P$ 矢量变换的旋转矩阵。

2.5 [13] ${}^{A}_{B}R$ 是一个3×3的矩阵，其特征值分别为1，e^{+ai}，e^{-ai}，这里 $i=\sqrt{-1}$ 。请问 ${}^{A}_{B}R$ 的特征向量与其特征值1的物理意义是什么？

2.6 [21] 推导方程式（2-80）。

2.7 [24] 描述（或编写）一个计算程序，用来表示等效轴角坐标系形式的旋转矩阵。可以从方
54 程（2-82）开始，但要使你的计算程序能够处理θ=0°和θ=180°这两种特殊情况。

2.8 [29]编写一个子程序用来描述旋转矩阵形式到等效轴角坐标系形式的变换。一个Pascal程序的起始形式如下

```
Procedure RMTOAA (VAR R:mat33; VAR K:vec3; VAR theta: real);
```

编写另一个子程序用来描述从等效轴角坐标系形式到旋转矩阵形式的变换

```
Procedure AATORM(VAR K:vec3; VAR theta: real: VAR R:mat33);
```

你可以选用C语言来编写程序。

在不同测试数据的情况下不断运行这些程序并验证你输入的结果，其中包括一些较难的情况。

2.9 [27] 由习题2.8求绕固定轴的回转角、俯仰角和偏转角。

2.10 [27]由习题2.8求$Z-Y-Z$欧拉角。

2.11 [10]在什么条件下，两个有限旋转矩阵可以交换？不需进行证明。

2.12 [14]已知一速度矢量如下

$$
{}^{B}V=\begin{bmatrix}10.0\\20.0\\30.0\end{bmatrix}
$$

又已知

$$
{}^{A}_{B}T=\begin{bmatrix}0.866 & -0.500 & 0.000 & 11.0\\0.500 & 0.866 & 0.000 & -3.0\\0.000 & 0.000 & 1.000 & 9.0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}
$$

计算 ^{A}V 。

2.13 [21]已知下列坐标系的定义

$$^{U}_{A}T=\begin{bmatrix}0.866 & -0.500 & 0.000 & 11.0\\ 0.500 & 0.866 & 0.000 & -1.0\\ 0.000 & 0.000 & 1.000 & 8.0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$^{B}_{A}T=\begin{bmatrix}1.000 & 0.000 & 0.000 & 0.0\\ 0.000 & 0.866 & -0.500 & 10.0\\ 0.000 & 0.500 & 0.866 & -20.0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$^{C}_{U}T=\begin{bmatrix}0.866 & -0.500 & 0.000 & -3.0\\ 0.433 & 0.750 & -0.500 & -3.0\\ 0.250 & 0.433 & 0.866 & 3.0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

绘制坐标系示意图（如图2-15的形式）定性地表明其坐标轴的排列，并求解 $^{B}_{C}T$ 。

2.14 [31]构造一个通用方程式求 $^{A}_{B}T$ ，这里，坐标系$\{B\}$最初与坐标系$\{A\}$重合，坐标系$\{B\}$绕$\hat{K}$旋转θ度，$\hat{K}$ 经过点 ^{A}P （通常情况下不经过坐标系$\{A\}$的原点)。

2.15 [34]坐标系$\{A\}$和$\{B\}$只是在姿态上不同，坐标系$\{B\}$可以看作是通过如下的方式得到：坐标系$\{B\}$最初与坐标系$\{A\}$重合，坐标系$\{B\}$绕单位矢量$\hat{K}$ 旋转θ弧度，即

$$^{A}_{B}R={}^{A}_{B}R_{K}(\theta)$$

55

表示如下

$$^{A}_{B}R=e^{k\theta}$$

这里

$$K=\begin{bmatrix}0 & -k_x & k_y\\ k_z & 0 & -k_x\\ -k_y & k_x & 0\end{bmatrix}$$

2.16 [22] 一个矢量映射须经过三个旋转矩阵变换:

$$^{A}P={}^{A}_{B}R\,^{B}_{C}R\,^{C}_{D}R\,^{D}P$$

一种方法是首先将这三个旋转矩阵相乘，得到 $^{A}_{D}R$ ，表示为

$$^{A}P={}^{A}_{D}R\,^{D}P$$

另一种方法是逐个通过矩阵计算进行矢量变换，即

$$^{A}P={}^{A}_{B}R\,^{B}_{C}R\,^{C}_{D}R\,^{D}P$$

$$^{A}P={}^{A}_{B}R\,^{B}_{C}R\,^{C}P$$

$$^{A}P={}^{A}_{B}R\,^{B}P$$

$$^{A}P={}^{A}P$$

如果 ^{D}P 以100Hz变化，那么我们就必须按相同的频率反复计算 ^{A}P 。而且，这三个旋转矩阵也同样变化。假设我们通过一个显示系统以30Hz的频率对 $^{A}_{B}R$ ，$^{B}_{C}R$ 和 $^{C}_{D}R$ 赋以新值，那么，按照什么方法计算使得计算量最小呢（乘法运算和加法运算）？

2.17 [16] 另一种用来描述空间一点的三维坐标系是圆柱坐标系，其中三个坐标参数的定义如图2-23所示。坐标θ给定xy面内的有向线段，r表示沿着这个方向的径向长度；z给定了在xy面上的高度。由圆柱坐标参数θ，r和z来计算笛卡儿坐标系中的一点 ^{A}P 。

2.18 [18] 另一种用来描述空间一点的三维坐标系是球坐标系，其中三个坐标的定义如图2-24所示。角度α和β可被看作是投射到空间的一条射线的方位角和俯仰角。第三个坐标r表示沿这条射线到被描述的空间点的径向距离。由球坐标系的参数α，β和r来计算笛卡儿坐标系中的一点 ^{A}P 。

2.19 [24] 一物体绕 $\hat{X}$ 轴旋转角度ϕ，接着绕旋转后生成的 $\hat{Y}$ 轴旋转角度ψ。由Euler 角公式可知最后的姿态是

$$R_x(\phi)R_y(\psi)$$

然而，如果这两次旋转是绕固定参考系的轴进行的，将解得

56 $$R_y(\psi)R_x(\phi)$$

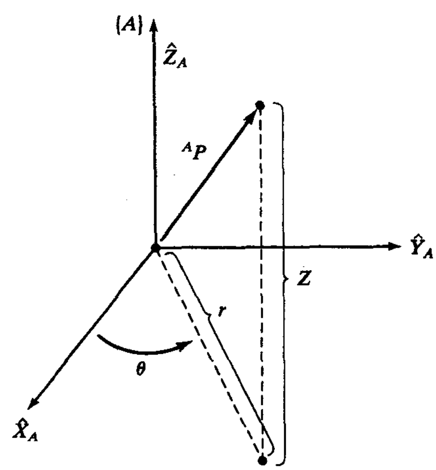


图2-23 圆柱坐标系

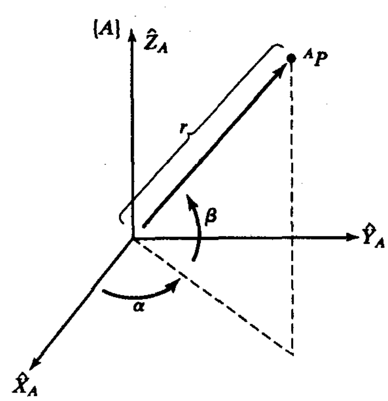


图2-24 球坐标系

进行乘法运算的顺序取决于被描述的旋转是相对于固定轴还是移动坐标系。而且应进一步看到，当绕着移动坐标系中的一个轴的旋转被确定了，在这种情况下，我们就确定了一个在固定坐标系中的旋转，并用下式表示为（对于本例）

$$R_x(\phi)R_y(\psi)R_x^{-1}(\phi)$$

通过左乘$R_x(\phi)$，这个相似变换[1]简化了方程的解，看起来好像矩阵乘法的顺序颠倒了。根

57 据这个观点，推导与Z-Y-Z欧拉角(α, β, γ)坐标系等效的旋转矩阵（结果由（2-72）给出）。

2.20 [20]假定一个矢量Q绕一个矢量 $\hat{K}$ 旋转θ形成一个新的矢量 Q' ，即

$$Q' = R_K(\theta)Q$$

用（2-80）推导Rodrigues公式

$$Q' = Q\cos\theta + \sin\theta(\hat{K}\times Q) + (1-\cos\theta)(\hat{K}\cdot\hat{Q})\hat{K}$$

2.21 [15] 如果旋转足够小，使得$\sin\theta=\theta$，$\cos\theta=1$和$\theta^2=0$近似成立，推导绕一般轴$\hat{K}$旋转θ的等效旋转矩阵。从（2-80）开始推导。

2.22 [20] 用习题2.21的结果，证明两个无穷小旋转相乘可交换（即旋转的次序不重要）。

2.23 [25] 写出一个算法，由三点$^UP_1$，$^UP_2$和$^UP_3$构造坐标系^U_AT，已知这些点的条件如下:

1. $^UP_1$在$\{A\}$的原点处;
2. $^UP_2$位于$\{A\}$的$\hat{X}$轴正向某处;
3. $^UP_3$位于$\{A\}$的XY平面上$\hat{Y}$轴正向的附近。

2.24 [45] 证明标准正交矩阵的凯莱公式。

2.25 [30] 证明旋转矩阵的特征值为1，$e^{\alpha i}$和$e^{-\alpha i}$，其中$i=\sqrt{-1}$。

2.26 [33] 证明任一欧拉角坐标系都可以表示任何旋转矩阵。

2.27 [15] 参见图2-25，求^A_BT的值。

2.28 [15] 参见图2-25，求^A_CT的值。

2.29 [15] 参见图2-25，求^B_CT的值。

2.30 [15] 参见图2-25，求^C_AT的值。

2.31 [15] 参见图2-26，求^A_BT的值。

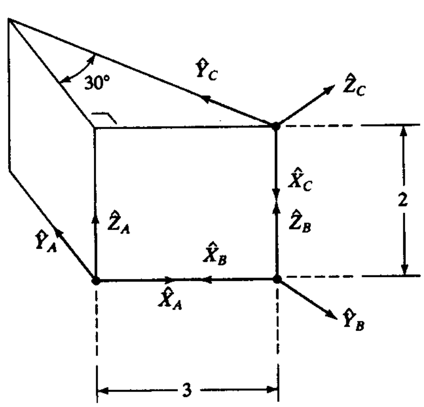


图2-25 在楔形块角顶点上的坐标系

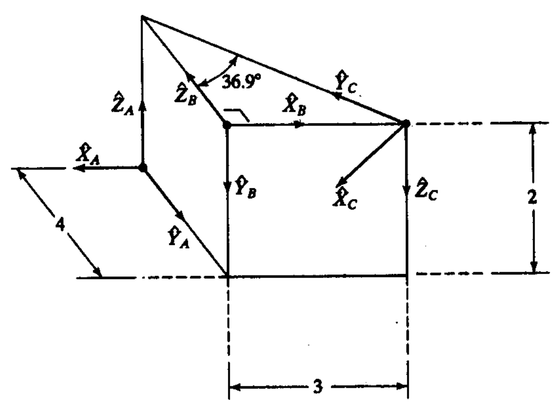


图2-26 在楔形块角顶点上的坐标系

2.32 [15] 参见图2-26，求^A_CT的值。

2.33 [15] 参见图2-26，求^B_CT的值。

2.34 [15] 参见图2-26，求^C_AT的值。

2.35 [20] 证明任何旋转矩阵的行列式的值恒等于1。

2.36 [36] 在平面（即2维空间）内运动的刚体有三个自由度。在3维空间内运动的刚体有六个自由度。证明在N维空间内的运动刚体有$\frac{1}{2}(N^2+N)$个自由度。

2.37 [15] 已知

$$
{}^{A}_{B}T=\begin{bmatrix} 0.25 & 0.43 & 0.86 & 5.0 \\ 0.87 & -0.50 & 0.00 & -4.0 \\ 0.43 & 0.75 & -0.50 & 3.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

${}^{B}_{A}T$ 中的（2,4）元素是什么？

2.38 [25] 假设在一个刚体内嵌有两个单位矢量v_1和v_2。注意，无论刚体如何旋转，两个矢量的几何夹角保持不变（即刚体旋转是一个“角度保持”的运动）。由此给出一个简要证明（四到五行）：旋转矩阵的逆矩阵等于它的转置矩阵，并且旋转矩阵是正交阵。

2.39 [37] 写出一个算法（可用C语言的形式）来求解一个已知旋转矩阵的单位四元数。将式（2-91）应用于起始点。

2.40 [33] 写出一个算法（可用C语言的形式）来求解一个已知旋转矩阵的Z-X-Z欧拉角。参见附录B。

2.41 [33] 写出一个算法（可用C语言的形式）来求解一个已知旋转矩阵的X-Y-X固定角。参见附录B。

编程习题

58~59 1. 如果你的函数库没有Atan2函数子程序，那么就编写一个。

2. 制作一个友好的用户界面，用一个角度θ代替2 × 2旋转矩阵描述在平面坐标系中的姿态。用户始终按照角度θ输入，但是程序内部仍采用旋转矩阵的形式。用x和y值来确定坐标系的位置矢量分量。因此，允许用户用一个三元数(x, y, θ)来给定坐标系。在程序内部用一个2 × 1位置矢量和一个2 × 2旋转矩阵，所以需要一个转换程序。写出一个子程序，其Pascal的程序引导为

```
Procedure UTOI (VAR uform: vec3; VAR iform: frame);
```

其中“UTOI”意思是“用户形式到内部形式”。第一个参数为三元数(x, y, θ)，并且第二个参数为“坐标系”的类型，由一个(2 × 1)位置矢量和一个(2 × 2)旋转矩阵组成。如果你愿意，可用一个3 × 3齐次变换表示这个坐标系，其第三行为[0 0 1]。求逆的程序也是必要的：

```
Procedure ITOU (VAR iform: frame; VAR uform: vec3);
```

3. 写出关于两个变换相乘的子程序。程序引导为：

```
Procedure TMULT (VAR brela, crelb, crela: frame);
```

前两个参数为输入，第三个为输出。注意程序中的参量文件名为（brela= ${}^{A}_{B}T$ ）。

4. 写出一个子程序，求变换的逆。程序引导为：

```
Procedure TINVERT (VAR brela, arelb: frame);
```

第一参数是输入，第二个为输出。注意程序中的参量文件名为（brela= ${}^{A}_{B}T$ ）。

5. 已知下列坐标系：

$$
\begin{aligned}
{}^{U}_{A}T &= [x\ y\ \theta] = [11.0\ -1.0\ 30.0] \\
{}^{B}_{A}T &= [x\ y\ \theta] = [0.0\ \ 7.0\ \ 45.0] \\
{}^{C}_{U}T &= [x\ y\ \theta] = [-3.0\ -3.0\ -30.0]
\end{aligned}
$$

由用户输入坐标系的表达式[x, y, θ]（θ是以deg为单位）。画出坐标系（如图2-15，只须在2维平面内），定性表达出它们的位置。写出子程序TMULT和TINVERT（在编程习题3和4中已定义）以尽可能多的次数求解 ${}^{B}_{C}T$ 。打印出 ${}^{B}_{C}T$ 在程序中的表达式和用户的表达式。

MATLAB习题1

a) 用Z-Y-X($\alpha-\beta-\gamma$)欧拉角表示法，写出MATLAB程序，当用户输入欧拉角$\alpha-\beta-\gamma$时，计算旋转矩阵 ${}^{A}_{B}R$ 。用两个例子测试:

i) α=10°, β=20°, γ=30°

ii) α=30°, β=90°, γ= −55°

对于情况i)，证明单位正交旋转矩阵的6个约束条件（即在3 × 3矩阵中有9个数，但是只有3个是独立的)，对于情况i)，证明这个完备性，${}^{B}_{A}R={}^{A}_{B}R^{-1}={}^{A}_{B}R^{T}$ 。

b) 编写一个MATLAB程序。当输入旋转矩阵 ${}^{A}_{B}R$ 时，计算出欧拉角$\alpha-\beta-\gamma$（反解问题)。计算两个可能的解。证明a）中两种情况的反解。使用循环方法检查你的结果是否正确（即，将a) 中的欧拉角输入到程序a; 将得到的旋转矩阵 ${}^{A}_{B}R$ 输入到程序b; 你将得到两组解答: 一组应当是用户原来的输入值，而另一组可用a）中的程序反复验证。

c) 仅简单地绕Y轴旋转β角。已知β=20°和 ${}^{B}P=\{1\,0\,1\}^{T}$ ，计算 ${}^{A}P$ ；用草图验证结果是否正确。

d) 用Corke MATLAB Robotics工具箱检查所有的结果。试使用函数*rpy2tr*()，*tr2rpy*()，*rotx*()，*roty*()，和*rotz*()。

MATLAB 习题2

a) 编写一个MATLAB程序，当用户输入Z-Y-X欧拉角$\alpha-\beta-\gamma$和位置矢量 ${}^{A}P_{B}$ 时，计算齐次变换矩阵 ${}^{A}_{B}T$ 。用两个例子测试:

i) α=10°, β=20°, γ=30°和 ${}^{A}P_{B}=\{1\,2\,3\}^{T}$ 。

ii) β=20°(α=γ=0°)，${}^{A}P_{B}=\{3\,0\,1\}^{T}$ 。 60

b) 已知β=20°(α=γ=0°)，${}^{A}P_{B}=\{3\,0\,1\}^{T}$ 和 ${}^{B}P=\{1\,0\,1\}^{T}$，用MATLAB计算 ${}^{A}P$ ；用草图验证结果是否正确。并用相同的数值验证齐次变换矩阵的三个表达式：作业b)是第二个表达式或变换映射。

c) 编写一个MATLAB程序，运用符号公式计算齐次变换矩阵的逆矩阵 ${}^{A}_{B}T^{-1}={}^{B}_{A}T$ 。将结果和MATLAB的数值函数（例如*inv*）作比较。证明两种方法均可得到正确的结果(即，${}^{A}_{B}T\,{}^{A}_{B}T^{-1}={}^{A}_{B}T^{-1}\,{}^{A}_{B}T=I_{4}$)。对上面a) 中的i) 和ii) 进行验证。

d) 令 ${}^{A}_{B}T$ 为a) 中i)的解，${}^{B}_{C}T$ 为a) 中(ii) 的解。

i) 计算 ${}^{A}_{C}T$ ，并用变换图说明关系。对 ${}^{C}_{A}T$ 作同样的处理。

ii) 已知d) i) 中的 ${}^{A}_{C}T$ 和 ${}^{B}_{C}T$ ——假定 ${}^{A}_{B}T$ 未知, 计算它并与已知的答案进行比较。

iii) 已知d) i) 中的 ${}^{A}_{C}T$ 和 ${}^{A}_{B}T$ ——假定 ${}^{B}_{C}T$ 未知，计算它并与已知的答案进行比较。

e) 用Corke MATLAB Robotics工具箱检查所有的结果。试使用函数*rpy2tr*()和*transl*()。 61

第3章 操作臂运动学

3.1 概述

操作臂运动学研究操作臂的运动特性，而不考虑使操作臂产生运动时施加的力。在操作臂运动学中，将要研究操作臂的位置、速度、加速度以及位置变量的所有高阶导数（对于时间或其他变量）。因此，操作臂运动学涉及所有与运动有关的几何参数和时间参数。操作臂的运动和使之运动而施加的力和力矩之间的关系称为操作臂动力学，将在第6章进行研究。

在本章中，只研究静止状态下操作臂连杆的位置和姿态。在第5章和第6章中，将要研究操作臂运动时的速度和加速度。

为了便于处理操作臂的复杂几何参数，首先需要在操作臂的每个连杆上分别固接一个连杆坐标系，然后再描述这些连杆坐标系之间的关系。除此之外，操作臂运动学还研究当各个连杆通过关节连接起来后，连杆坐标系之间的相对关系。本章的研究重点是把操作臂关节变量作为自变量，描述操作臂末端执行器的位置和姿态与操作臂基座之间的函数关系。

3.2 连杆描述

操作臂可以看成由一系列刚体通过关节连接而成的一个运动链，我们将这些刚体称为连
62 杆。通过关节将两个相邻的连杆连接起来。当两个刚体之间的相对运动是两个平面之间的相对滑动时，连接相邻两个刚体的运动副称为**低副**。图3-1所示为六种常用的低副关节。

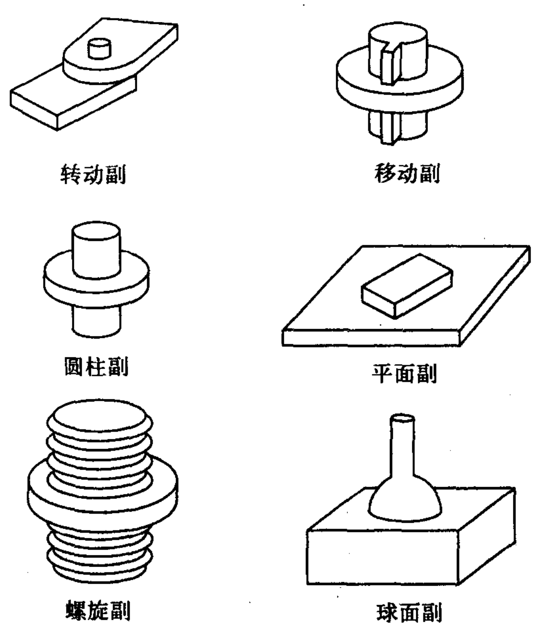


图3-1 六种常用的低副关节

在进行操作臂的结构设计时，通常优先选择仅具有一个自由度的关节作为连杆的连接方式。大部分操作臂中包括**转动关节**或**移动关节**。在极少数情况下，采用具有n个自由度的关节，这种关节可以看成是用n个单自由度的关节与$n-1$个长度为0的连杆连接而成的。因此，不失一般性，这里仅对只含单自由度关节的操作臂进行研究。

从操作臂的固定基座开始为连杆进行编号，可以称固定基座为连杆0。第一个可动连杆为连杆1，以此类推，操作臂最末端的连杆为连杆n。为了确定末端执行器在3维空间的位置和姿态，操作臂至少需要6个关节⊖。典型的操作臂具有5或6个关节。有些机器人实际上不是一个单独的运动链——其中含有平行四边形连杆机构或其他的闭式运动链。在本章最后将要介绍一个这种类型的操作臂。

设计人员在进行机器人设计时，需要考虑典型机器人中单个连杆的许多特性：材料特性、连杆的强度和刚度、关节轴承的类型和安装位置、外形、重量和转动惯量以及其他一些因素。然而在建立机构运动学方程时，*为了确定操作臂两个相邻关节轴的位置关系，可把连杆看作是一个刚体*。用空间的直线来表示关节轴。关节轴i可用空间的一条直线，即用一个矢量来表示，连杆i绕关节轴i相对于连杆$i-1$转动。由此可知，在描述连杆的运动时，一个连杆的运动可用两个参数描述，这两个参数定义了空间两个关节轴之间的相对位置。 63

三维空间中的任意两个轴之间的距离均为一个确定值，两个轴之间的距离即为两轴之间公垂线的长度。两轴之间的公垂线总是存在的，当两轴不平行时，两轴之间的公垂线只有一条。当两关节轴平行时，则存在无数条长度相等的公垂线。在图3-2中，关节轴$i-1$和关节轴i之间公垂线的长度为a_{i-1}，a_{i-1}即为**连杆长度**。也可以用另一种方法来描述连杆参数a_{i-1}，以关节轴$i-1$为轴线作一个圆柱，并且把该圆柱的半径向外扩大，直到该圆柱与关节轴i相交时，这时圆柱的半径即等于a_{i-1}。

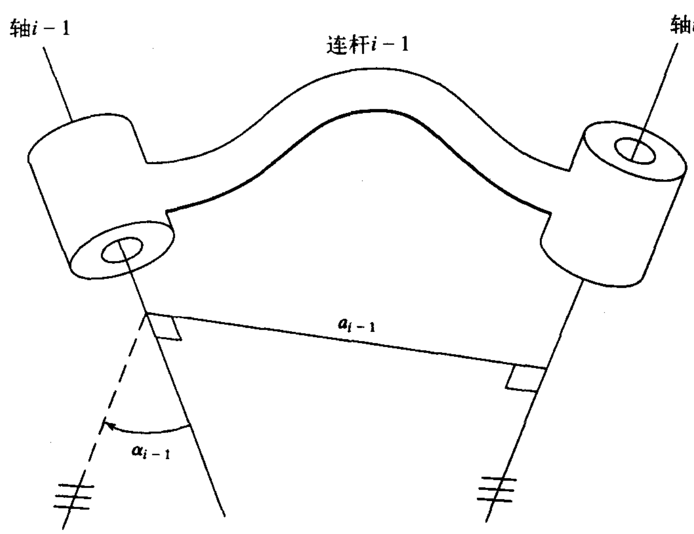


图3-2 一个连杆的运动参数是由连杆两端关节轴的相对关系决定的，可以用两个参数描述这种关系：连杆的长度a和连杆转角α

⊖ 这是显而易见的，因为当描述一个物体在空间的位置和姿态时需要6个参数——3个位置和3个方位。

用来定义两关节轴相对位置的第二个参数为**连杆转角**。假设作一个平面，并使该平面与两关节轴之间的公垂线垂直，然后把关节轴$i-1$和关节轴i投影到该平面上，在平面内轴$i-1$
64 按照右手法则绕a_{i-1}转向轴i，测量两轴线之间的夹角⊖，用转角α_{i-1}定义连杆$i-1$的扭转角。在图3-2中，α_{i-1}表示关节轴$i-1$和关节轴i之间的夹角。（上面带有三条短划线的两条线为平行线。）当两个关节轴线相交时，两轴线之间的夹角可以在两者所在的平面中测量，但是α_{i-1}没有意义。在这种特殊情况下，α_{i-1}的大小和符号可以任意选取。

例3.1

图3-3所示为一个机器人连杆的示意图。如果把该连杆安装到机器人上时，支承“A”是低序号关节，求该连杆的长度和转角。假设支承孔居中。

通过观察可以知道，两关节轴的公垂线正好是连接这两个支承的金属杆的中线，因此该连杆的长度为7英寸。右侧图实际表示了连杆两端支承在其轴线公垂面上的投影。连杆转角的测量按照右手定则绕公垂线从轴线$i-1$转向轴线i，因此在本例中，连杆转角显然为$+45°$。■

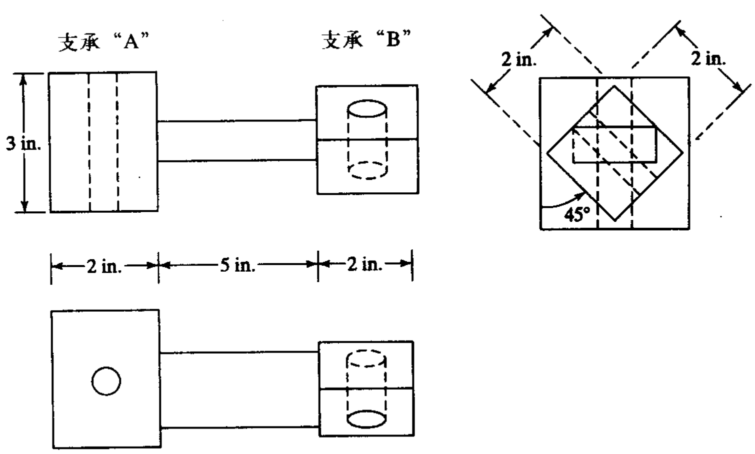


图3-3 支承两个转动轴的连杆

可以用上面定义的两个参数，即连杆的长度和转角来定义空间任意两条直线的关系（在这里是用来定义两个关节轴之间的关系）。

3.3 关于连杆连接的描述

在机器人中把各个连杆连接起来时，设计人员还要考虑和解决许多问题。包括关节的强度、关节的润滑方式、轴承的类型以及轴承的装配方法。然而在研究机器人的运动学问题时，
65 仅需要考虑两个参数，这两个参数完全确定了所有连杆的连接方式。

连杆链中的中间连杆

相邻两个连杆之间有一个公共的关节轴。沿两个相邻连杆公共轴线方向的距离可以用一

⊖ 在这种情况下，a_{i-1}的方向是由轴$i-1$指向轴i。

个参数描述，该参数称为**连杆偏距**。在关节轴i上的连杆偏距记为d_i。用另一个参数描述两相邻连杆绕公共轴线旋转的夹角，该参数称为**关节角**，记为θ_i。

图3-4表示相互联结的连杆$i-1$和连杆i。根据前面的定义可知a_{i-1}表示连接连杆$i-1$两端关节轴的公垂线长度。同样，a_i表示连接连杆i两端关节轴的公垂线长度。描述相邻两连杆连接关系的第一个参数是从公垂线a_{i-1}与关节轴i的交点到公垂线a_i与关节轴i的交点的有向距离，即连杆偏距d_i。连杆偏距d_i的表示方法如图3-4所示。当关节i为移动关节时，连杆偏距d_i是一个变量。描述相邻两连杆连接关系的第二个参数是a_{i-1}的延长线和a_i之间绕关节轴i旋转所形成的夹角，即关节角θ_i，如图3-4所示。图中，标有双斜线的直线为平行线。当关节i为转动关节时，关节角θ_i是一个变量。

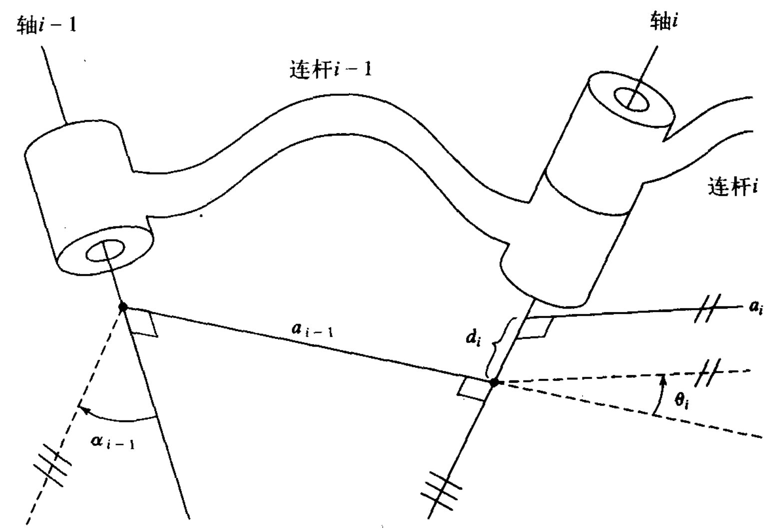


图3-4 用来描述相邻连杆之间连接关系的两个参数：连杆的偏距d和关节角θ

连杆链中的首尾连杆

连杆的长度a_i和转角a_i取决于关节轴线i和$i+1$，因此在本节中讨论从a_1到a_{n-1}以及从α_1到α_{n-1}的规定。对于运动链中的末端连杆，其参数习惯设定为0，即$a_0=a_n=0.0$，$\alpha_0=\alpha_n=0.0$⊖。在本节中，按照上面的规定对关节2到关节$n-1$的连杆偏距d_i和关节角θ_i进行了定义。如果关节1为转动关节，则θ_1的零位可以任意选取，并且规定$d_1=0.0$。同样，如果关节1为移动关节，则d_1的零位可以任意选取，并且规定$\theta_1=0.0$。这种规定完全适用于关节n。 66

之所以采用这样规定，是因为当一个参数可以任意选取时，把另一个参数设定为0，可以使以后的计算尽可能地简单。

连杆参数

因此，机器人的每个连杆都可以用四个运动学参数来描述，其中两个参数用于描述连杆本身，另外两个参数用于描述连杆之间的连接关系。通常，对于转动关节，θ_i为**关节变量**，

⊖ 实际上，根本不需要定义a_n，α_n。

其他三个**连杆参数**是固定不变的；对于移动关节，d_i 为关节变量，其他三个连杆参数是固定不变的。这种用连杆参数描述机构运动关系的规则称为**Denavit-Hartenberg参数**[1]⊖。还有其他一些描述机构运动参数的方法，在此不作介绍。

根据上述方法，可以确定任意机构的Denavit-Hartenberg参数，并用这些参数来描述该机构。例如，对于一个6关节机器人，需要用18个参数就可以完全描述这些固定的运动学参数。如果6关节机器人的6个关节均为转动关节，这时18个固定参数可以用6组(a_i, α_i, d_i)表示。

例3.2

一个机器人由连杆1和连杆2两个连杆相互连接组成，如图3-3所示。关节2由连杆1的支承“B”和连杆2的支承“A”组成，支承“A”和支承“B”的装配面为平面，两者的装配面直接接触。求连杆偏距d_2。

连杆偏距d_2是关节2上的偏距，它是连杆1和连杆2之间公垂线沿关节轴2方向的距离。由图3-3可知，$d_2=2.5$英寸。

■

在介绍更多例子之前，我们先对操作臂上固连于每一个连杆的坐标系进行定义。

3.4 对连杆附加坐标系的规定

为了描述每个连杆与相邻连杆之间的相对位置关系，需要在每个连杆上定义一个固连坐标系。根据固连坐标系所在连杆的编号对固连坐标系命名，因此，固连在连杆i上的固连坐标系称为坐标系$\{i\}$。

67

连杆链中的中间连杆

通常按照下面的方法确定连杆上的固连坐标系：坐标系$\{i\}$的$\hat{Z}$轴称为$\hat{Z}_i$，并与关节轴i重合，坐标系$\{i\}$的原点位于公垂线a_i与关节轴i的交点处。$\hat{X}_i$沿a_i方向由关节i指向关节$i+1$。

当$a_i=0$时，$\hat{X}_i$垂直于$\hat{Z}_i$和$\hat{Z}_{i+1}$所在的平面。按右手定则绕$\hat{X}_i$轴的转角定义为α_i，由于$\hat{X}_i$轴的方向可以有两种选择，因此α_i的符号也有两种选择。$\hat{Y}_i$轴由右手定则确定，从而完成了对坐标系$\{i\}$的定义。图3-5所示为一般操作臂上坐标系$\{i-1\}$和$\{i\}$的位置。

连杆链中的首尾连杆

固连于机器人基座（即连杆0）上的坐标系为坐标系$\{0\}$。这个坐标系是一个固定不动的坐标系，因此在研究操作臂运动学问题时，可以把该坐标系作为参考坐标系。可以在这个参考坐标系中描述操作臂所有其他连杆坐标系的位置。

参考坐标系$\{0\}$可以任意设定，但是为了使问题简化，通常设定$\hat{Z}_0$轴沿关节轴1的方向，并且当关节变量1为0时，设定参考坐标系$\{0\}$与坐标系$\{1\}$重合。按照这个规定，总有$a_0=0.0$和$\alpha_0=0.0$。另外，当关节1为转动关节时，$d_1=0.0$；当关节1为移动关节时，$\theta_1=0.0$。

⊖ 需要注意的是，有许多建立坐标系的方法均称为Denavit-Hartenberg的方法，但是在细节上有些不同。例如，本书中坐标系的编号方法与一些机器人专著中坐标系的编号方法不同。在本书中坐标系$\{i\}$固连于连杆i上，其原点位于关节轴i上。

对于转动关节n，设定θ_n=0.0，此时 $\hat{X}_N$ 轴与 $\hat{X}_{N-1}$ 轴的方向相同，选取坐标系{N}的原点位置使之满足d_n =0.0。对于移动关节n，设定 $\hat{X}_N$ 轴的方向使之满足θ_n =0.0。当d_n =0.0时，选取坐标系{N}的原点位于 $\hat{X}_{N-1}$ 轴与关节轴n的交点位置。

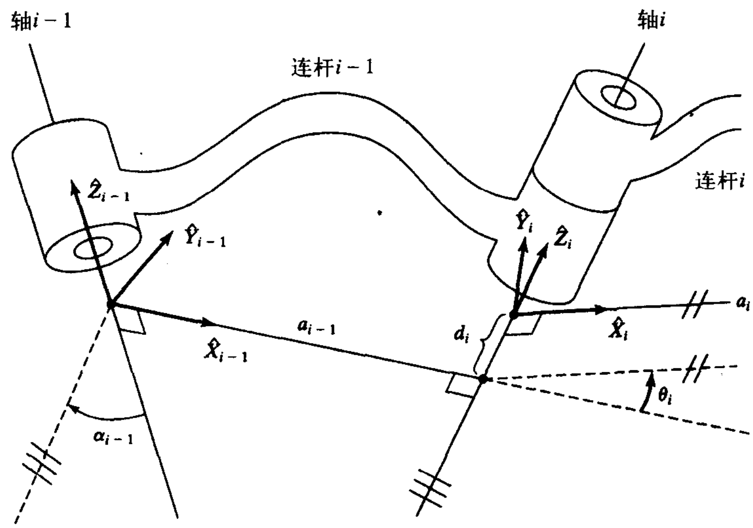


图3-5 固连于连杆i上的连杆坐标系{i} 68

在连杆坐标系中对连杆参数的归纳

如果按照上述规定将连杆坐标系固连于连杆上时，连杆参数可以定义如下：

a_i = 沿 $\hat{X}_i$ 轴，从 $\hat{Z}_i$ 移动到 $\hat{Z}_{i+1}$ 的距离；

α_i = 绕 $\hat{X}_i$ 轴，从 $\hat{Z}_i$ 旋转到 $\hat{Z}_{i+1}$ 的角度；

d_i = 沿 $\hat{Z}_i$ 轴，从 $\hat{X}_{i-1}$ 移动到 $\hat{X}_i$ 的距离；

θ_i = 绕 $\hat{Z}_i$ 轴，从 $\hat{X}_{i-1}$ 旋转到 $\hat{X}_i$ 的角度。

因为a_i 对应的是距离，因此通常设定a_i >0。然而α_i、d_i和θ_i的值可以为正，也可以为负。

最后需要声明，按照上述方法建立的连杆固连坐标系并不是唯一的。首先，当选取 $\hat{Z}_i$ 轴与关节轴i重合时， $\hat{Z}_i$ 轴的指向有两种选择。此外，在关节轴相交的情况下（这时a_i =0），由于 $\hat{X}_i$ 轴垂直于 $\hat{Z}_i$ 轴与 $\hat{Z}_{i+1}$ 轴所在的平面，因此 $\hat{X}_i$ 轴的指向也有两种选择。当关节轴i与i+1平行时，坐标系{i}的原点位置可以任意选择（通常选取该原点使之满足d_i =0）。另外，当关节为移动关节时，坐标系的选取也有一定的任意性（见例3.5）。

建立连杆坐标系的步骤

对于一个新机构，可以按照下面的步骤正确地建立连杆坐标系。

1. 找出各关节轴，并标出（或画出）这些轴线的延长线。在下面的步骤2至步骤5中，仅考虑两个相邻的轴线（关节轴i和i+1）。

2. 找出关节轴i和i+1之间的公垂线或关节轴i和i+1的交点，以关节轴i和i+1的交点或公垂

线与关节轴i的交点作为连杆坐标系{i}的原点。

3. 规定 $\hat{Z}_i$ 轴沿关节轴i的指向。

4. 规定 $\hat{X}_i$ 轴沿公垂线的指向，如果关节轴i和$i+1$相交，则规定 $\hat{X}_i$ 轴垂直于关节轴i和$i+1$所在的平面。

5. 按照右手定则确定 $\hat{Y}_i$ 轴。

6. 当第一个关节变量为0时，规定坐标系{0}和{1}重合。对于坐标系{N}，其原点和 $\hat{X}_N$ 的方向可以任意选取。但是在选取时，通常尽量使连杆参数为0。

例3.3

图3-6(a)所示为一个平面三杆操作臂。因为三个关节均为转动关节，因此有时称该操作臂
69 为RRR（或3R）机构。图3-6(b)为该操作臂的简图。注意在三个关节轴上均标有双斜线，表示这些关节轴线平行。在此机构上建立连杆坐标系并写出Denavit-Hartenberg参数。

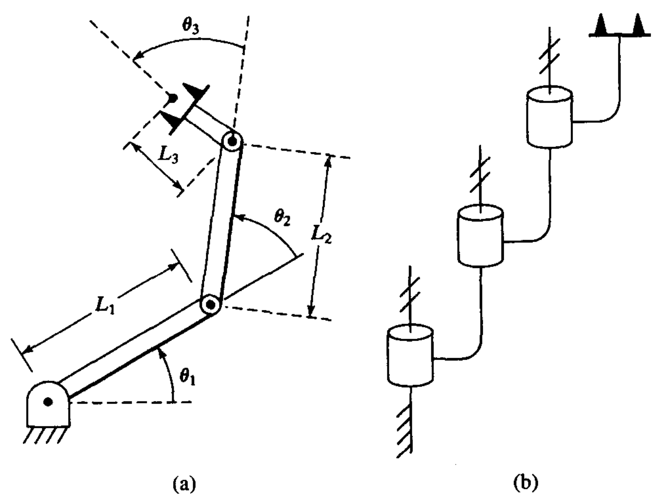


图3-6 一个三连杆平面操作臂，图(b)中用简图表示这个操作臂，各轴上标记的斜线表示它们相互平行

我们首先定义参考坐标系，即坐标系{0}，它固定在基座上。当第一个关节变量值(θ_1)为0时，坐标系{0}与坐标系{1}重合，因此我们建立的坐标系{0}如图3-7所示，且 $\hat{Z}_0$ 轴与关节1轴线重合。这个操作臂所有的关节轴线都与操作臂所在的平面垂直。由于该操作臂位于一个平面上，因此所有的 $\hat{Z}$ 轴相互平行，没有连杆偏距——所有的d_i 都为0。所有关节都是旋转关节，因此当转角都为0时，所有的 $\hat{X}$ 轴一定在一条直线上。

由上面的分析很容易确定如图3-7所示的各坐标系。图3-8给出了相应的连杆参数。

注意到由于所有的关节轴都是平行的，且所有的 $\hat{Z}$ 轴都垂直纸面向外，因此α_i 都为0。这显然是一个非常简单的机构。

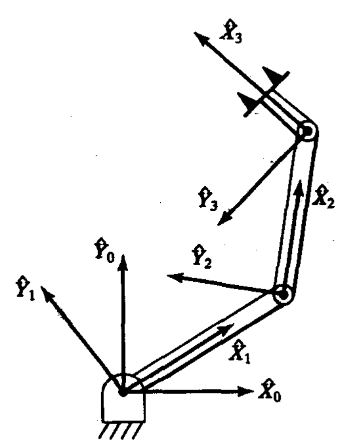


图3-7 连杆坐标系的布局

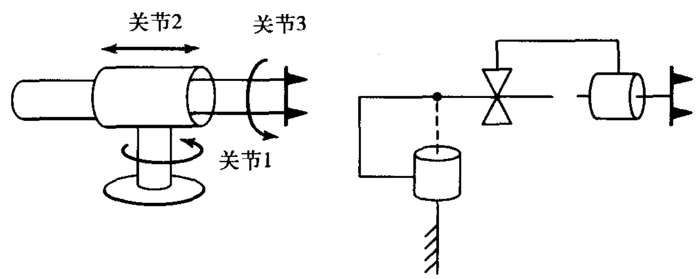
i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	0	L_1	0	θ_2
3	0	L_2	0	θ_3

图3-8　三连杆平面操作臂的连杆参数表

同样注意到，我们的运动学分析最后总是归结到一个坐标系里，这个坐标系的原点位于最后一个关节轴上，因此在连杆参数里没有l_3。关于末端执行器的连杆偏距将在后面分别予以讨论。

例3.4

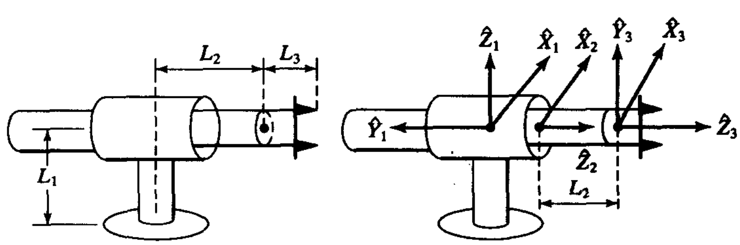
图3-9(a)所示为一个三自由度机器人，其中包括一个移动关节。该操作臂称为“RPR型机构”(一种定义关节类型和顺序的表示方法)。它是一种“柱坐标”机器人，俯视时前两个关节可看作是极坐标形式，最后一个关节（关节3）可提供机械手的转动。图3-9(b)为该操作臂的简图。注意表示移动关节的符号，还要注意“点”表示两个相邻关节轴的交点。实际上关节轴1与关节轴2是相互垂直的。



(a)　　(b)

70~71

图3-9　包含一个移动关节的三自由度操作臂



(a)　　(b)

图3-10　连杆坐标系的布局

图3-10(a)所示是操作臂的移动关节处于最小伸展状态时的情况。图3-10(b)表示连杆坐标系的布局。

注意到在该图中机器人所处的位置$\theta_1=0$，所以坐标系{0}和坐标系{1}在图中完全重合。注意，坐标系{0}虽然没有建在机器人法兰基座的最底部，但仍然刚性地固连于连杆0上，即机器人固定不动的部分。正如同我们在进行运动学分析时并不需要将连杆坐标系一直向上描述到机械手的外部一样，反过来也不必将连杆坐标系固连于机器人基座的最底端。只要把坐标系{0}建立在固定连杆0的任意位置，把坐标系{N}（即最后一个坐标系）建立在操作臂的末端连杆的任意位置就行了。之后，其他连杆偏距可用一般方法进行处理。

注意到转动关节绕相连坐标系的$\hat{Z}$轴旋转，而移动关节沿$\hat{Z}$轴平动。对于移动关节i，θ_i是常量，d_i是变量。如果连杆处于最小伸展状态时d_i为0，则连杆坐标系{2}如图所示，这时连杆距d_2是一个实数。图3-11给出了相应的连杆参数。

注意到对于该机器人θ_2值为0，d_2是变量。由于关节轴1和关节轴2相交，所以a_1为0。为使$\hat{Z}_1$与$\hat{Z}_2$重合，$\hat{Z}_1$需旋转（绕$\hat{X}_1$轴）的角度α_1必为90度。

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	90°	0	d_2	0
3	0	0	L_2	θ_3

图3-11 例3.4 RPR型操作臂的连杆参数表

例3.5

图3-12(a)所示是一个三连杆、3R型操作臂，其中关节轴1与关节轴2相交，而关节轴2和关节轴3相互平行。图3-12(b)是该操作臂的运动简图。注意，简图上的标注表示前两个轴相互垂直，后两个轴相互平行。

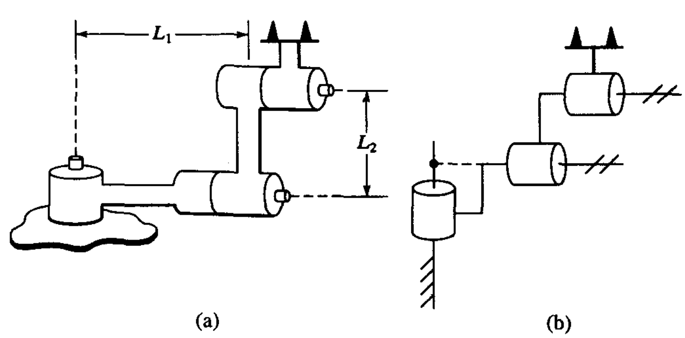


图3-12 三连杆非平面操作臂

坐标系的建立和Denavit-Hartenberg参数并不是唯一的，为证明这一点，下面是关于坐标系{1}和坐标系{2}的几种可能的正确配置形式。

图3-13所示是由于 $\hat{Z}_2$ 有两个方向，因此坐标系的布局及相应参数也有两种选择。

一般情况下，当 $\hat{Z}_i$ 与 $\hat{Z}_{i+1}$ 相交时，$\hat{X}_i$ 有两种选择。在本例中，由于关节轴1和关节轴2相交，因此 $\hat{X}_1$ 的方向有两种选择。图3-14所示是 $\hat{X}_1$ 选择另一个方向时，另外两种可能的坐标系布局形式。

实际上，当 $\hat{Z}_1$ 方向向下时，相应于前面的四种选择还有四种可能的坐标系的布局形式。

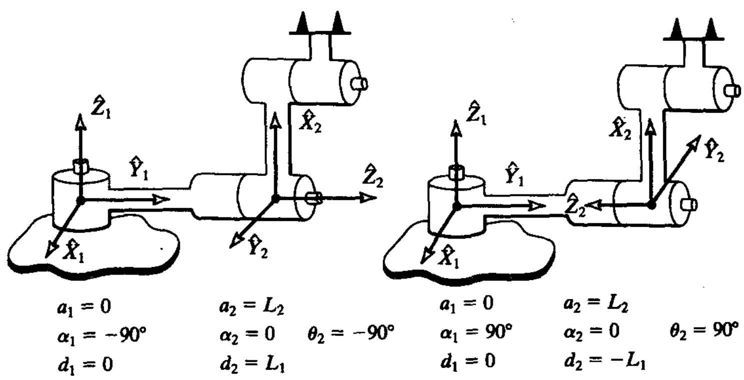


图3-13 两种可能的坐标系布局

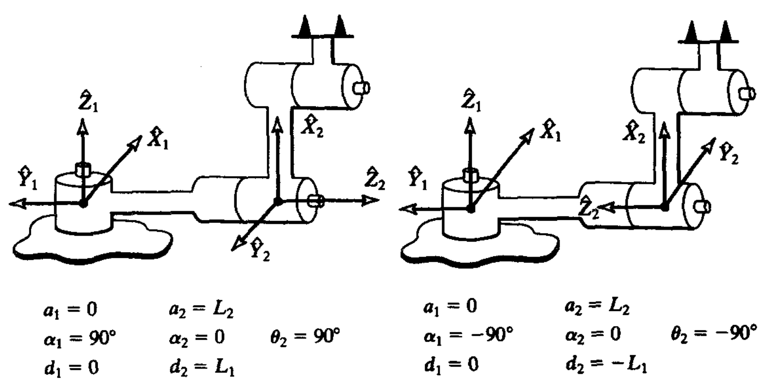


图3-14 另两种可能的坐标系布局

3.5 操作臂运动学

在这一节，我们将导出相邻连杆间坐标系变换的一般形式，然后将这些独立的变换联系起来求出连杆n相对于连杆0的位置和姿态。

连杆变换的推导

我们希望建立坐标系{i}相对于坐标系{i-1}的变换。一般这个变换是由四个连杆参数构成的函数。对任意给定的机器人，这个变换是只有一个变量的函数，另外三个参数是由机械系

统确定的。通过对每个连杆逐一建立坐标系，我们把运动学问题分解成n个子问题。为了求解每个子问题，即${}^{i-1}_{i}T$，我们将每个子问题再分解成四个次子问题。四个变换中的每一个变换都是仅有一个连杆参数的函数，通过观察能够很容易写出它的形式。首先我们为每个连杆定义三个中间坐标系——$\{P\}$，$\{Q\}$和$\{R\}$。

72~74 图3-15所示是与前述一样的一对关节，图中定义了坐标系$\{P\}$、$\{Q\}$和$\{R\}$。注意，为了表示简洁起见，在每一个坐标系中仅给出了$\hat{X}$轴和$\hat{Z}$轴。由于旋转α_{i-1}，因此坐标系$\{R\}$

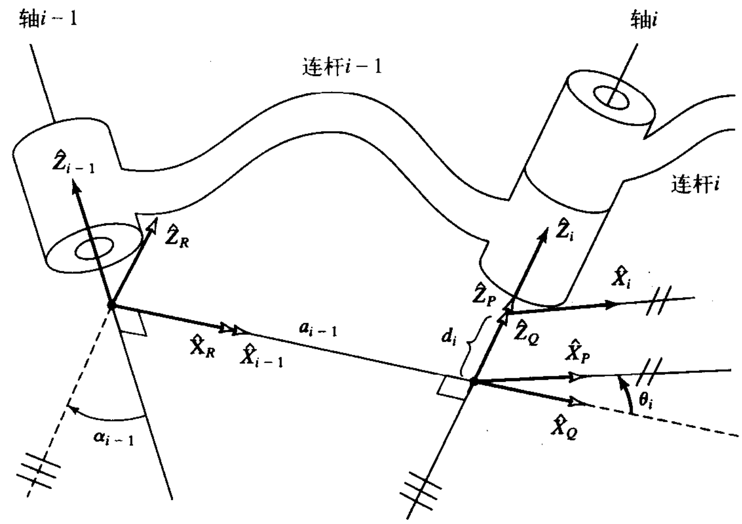


图3-15 中间坐标系$\{P\}$，$\{Q\}$和$\{R\}$的位置

与坐标系$\{i-1\}$不同；由于位移a_{i-1}，因此坐标系$\{Q\}$与坐标系$\{R\}$不同；由于转角θ_i，因此坐标系$\{P\}$与坐标系$\{Q\}$不同；由于位移d_i，因此坐标系$\{i\}$与坐标系$\{P\}$不同。如果想把在坐标系$\{i\}$中定义的矢量变换成在坐标系$\{i-1\}$中的描述，这个变换矩阵可以写成

$$ {}^{i-1}P={}^{i-1}_{R}T\,{}^{R}_{Q}T\,{}^{Q}_{P}T\,{}^{P}_{i}T\,{}^{i}P \tag{3-1}$$

即

$$ {}^{i-1}P={}^{i-1}_{i}T\,{}^{i}P \tag{3-2}$$

这里

$$ {}^{i-1}_{i}T={}^{i-1}_{R}T\,{}^{R}_{Q}T\,{}^{Q}_{P}T\,{}^{P}_{i}T \tag{3-3}$$

考虑每一个变换矩阵，式（3-3）可以写成

$$ {}^{i-1}_{i}T=R_X(\alpha_{i-1})D_X(a_{i-1})R_Z(\theta_i)D_Z(d_i) \tag{3-4}$$

即

$$ {}^{i-1}_{i}T=\mathrm{Screw}_X(a_{i-1},\alpha_{i-1})\mathrm{Screw}_Z(d_i,\theta_i) \tag{3-5}$$

这里$\mathrm{Screw}_Q(r,\phi)$代表沿$\hat{Q}$轴平移r、再绕$\hat{Q}$轴旋转角度ϕ的组合变换。由矩阵连乘计算出式(3-4)，得到${}^{i-1}_{i}T$的一般表达式

$$ {}^{i-1}_{i}T=\begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1}d_i \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1}d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3-6} $$

75

例3.6

图3-11是图3-9所示机器人对应的连杆参数，试用这些参数计算各个连杆的变换矩阵。

把相应的参数代入式（3-6），可得

$$ \begin{aligned} {}^{0}_{1}T&=\begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ {}^{1}_{2}T&=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ {}^{2}_{3}T&=\begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & 0 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3-7} $$

当推导出这些连杆变换矩阵时，会发现可用它来检查这个变换的正确性。例如每个变换矩阵的第四列元素表示了相邻更高一级坐标系原点的坐标。

连续的连杆变换

如果已经定义了连杆坐标系和相应的连杆参数，就能直接建立运动学方程。分别计算出各个连杆变换矩阵就能得出各个连杆参数的值。把这些连杆变换矩阵连乘就能得到一个坐标系$\{N\}$相对于坐标系$\{0\}$的变换矩阵:

$$ {}^{0}_{N}T={}^{0}_{1}T\,{}^{1}_{2}T\,{}^{2}_{3}T\cdots{}^{N-1}_{N}T \tag{3-8} $$

变换矩阵 ${}^{0}_{N}T$ 是关于n个关节变量的函数。如果能得到机器人关节位置传感器的值，机器人末端连杆在笛卡儿坐标系里的位置和姿态就能通过 ${}^{0}_{N}T$ 计算出来。

3.6 驱动器空间、关节空间和笛卡儿空间

对于一个具有n个自由度的操作臂来说，它的所有连杆位置可由一组n个关节变量加以确定。这样的一组变量常被称为$n\times1$的**关节矢量**。所有关节矢量组成的空间称为**关节空间**。至此，我们关心的是如何将已知的关节空间描述转化为**笛卡儿空间**的描述。当位置是在空间相互正交的轴上测量，且姿态是按照第2章中的任何一种规定测量时，我们称这个空间为笛卡儿空间，有时称为**任务空间**和**操作空间**。

76

到目前为止，我们一直假设每个运动关节都是直接由某种驱动器驱动。然而，对于许多工业机器人来说并非如此。例如有时用两个驱动器以差动的方式驱动一个关节，有时候用直线驱动器通过四连杆机构来驱动旋转关节。在这些情况下，就需要考虑驱动器位置。由于测量操作臂位置的传感器常常安装在驱动器上，因此进行某些计算时必须把关节矢量表示成一组驱动器函数，即**驱动器矢量**。

如图3-16所示，一个操作臂的位姿描述有三种表示方法：**驱动器空间**描述、**关节空间**描述和**笛卡儿空间**描述。在本章中我们主要讨论图3-16实线箭头表示的映射关系。在第4章我们将讨论逆向映射关系，如图中虚线箭头所示。

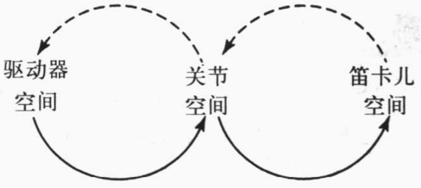


图3-16 不同运动学描述之间的映射

关节驱动器的连接方式有很多种，可以列出一个目录，在这里我们不予以考虑。在进行机器人设计或分析时，都必须确定驱动器位置和关节位置的对应关系。在下一节中，我们将以工业机器人为对象求解一个典型问题。

3.7 举例：两种典型机器人的运动学问题

常用的工业机器人可以有很多不同的运动构形[2, 3]。在本节中，我们将分析两种典型工业机器人的运动学问题。首先我们分析Unimation PUMA 560机器人，一个六自由度的转动关节操作臂。我们将求解以关节角度为变量的运动学方程。在该例中，我们不分析驱动器空间和关节空间之间关系的其他问题。其次，我们分析Yasukawa Motoman L-3机器人，一个五自由度转动关节型机器人。对这个例子我们将进行详细分析，包括驱动器-关节之间的变换。开始阅读本书时可以跳过这个例子不看。

PUMA560

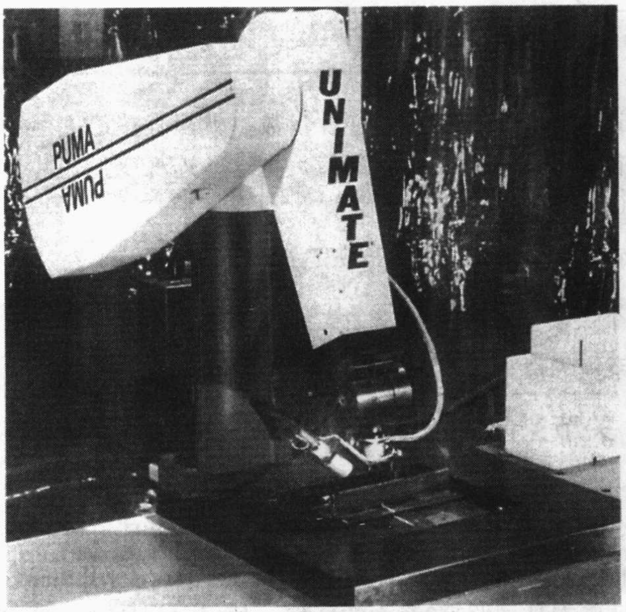


图3-17 Unimation PUMA 560机器人，经Unimation有限公司Shelter Rock Lane, Danbury, Conn许可

Unimation PUMA560（图3-17）是一个六自由度机器人，所有关节均为转动关节（即这是一个6R机构）。图3-18所示是所有关节角为零位时连杆坐标系的分布情况⊖。图3-19所示是机器人前臂的一些详细情况。

注意，当θ_1为0时，坐标系{0}（未在图中表示）与坐标系{1}重合。还要注意，这台机器人与许多工业机器人一样，关节4、5和6的轴线相交于同一点，并且交点与坐标系{4}、{5}、{6}的原点重合，而且关节轴4、5、6相互垂直。图3-20所示为机器人腕部机构的运动简图。

图3-21所示为对应于连杆坐标系位移的连杆参数。对于PUMA560机器人，在操作臂的腕部有一个轮系将关节4、5、6的运动耦合在一起，因此针对这3个关节，需要对关节空间和驱动器空间加以区分，并分两步求出完整的运动学解。但是，在此例中我们只讨论从关节空间到笛卡儿空间的运动学问题。 77~78

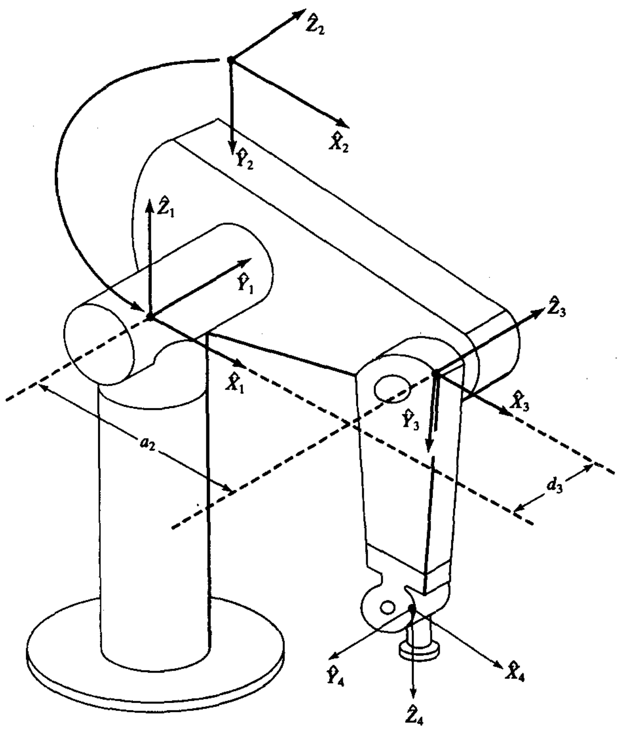


图3-18 PUMA560操作臂运动参数和坐标系分布

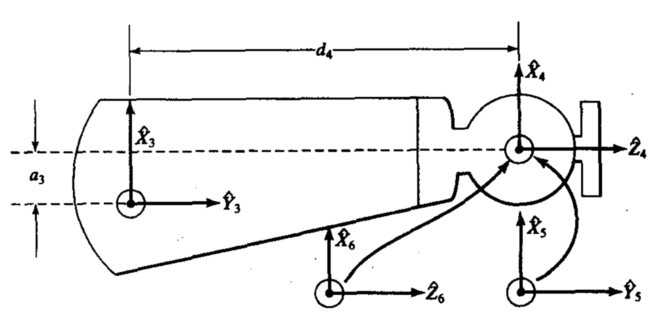


图3-19 PUMA560前臂的运动参数和坐标系分布 79

⊖ Unimation对于关节零位的定义有些不同，例如，$\theta_3^* = \theta_3 - 180°$，这里$\theta_3^*$是Unimation公司对于关节3位置的规定。

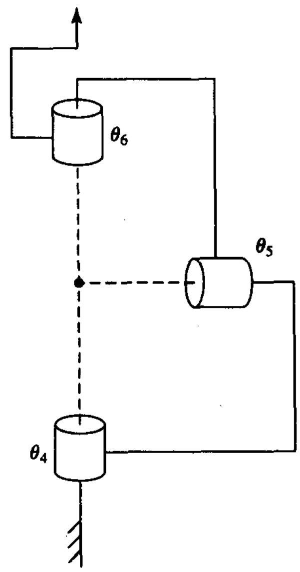


图3-20 一个3R腕部机构简图，三个轴相互垂直并相交于一点，这种设计用于PUMA560和许多工业机器人中

i	α_i-1	a_i-1	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	−90°	0	0	θ_2
3	0	a_2	d_3	θ_3
4	−90°	a_3	d_4	θ_4
5	90°	0	0	θ_5
6	−90°	0	0	θ_6

图3-21 PUMA560的连杆参数表

80

根据式（3-6），可以求出每一个连杆变换矩阵：

$$
{}^0_1T=\begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0\\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}
$$

$$
{}^1_2T=\begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -s\theta_2 & -c\theta_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}
$$

$$
{}^2_3T=\begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & a_2\\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & d_3\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{3-9}
$$

$$
{}^3_4T=\begin{bmatrix} c\theta_4 & -s\theta_4 & 0 & a_3\\ 0 & 0 & 1 & d_4\\ -s\theta_4 & -c\theta_4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}
$$

$$
{}^4_5T=\begin{bmatrix} c\theta_5 & -s\theta_5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ s\theta_5 & c\theta_5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}
$$

$$
{}^{5}_{6}T=\begin{bmatrix} c\theta_6 & -s\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_6 & -c\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3-9'}
$$

将各个连杆矩阵连乘得到 ${}^{0}_{6}T$ 。在连乘中，得到的中间结果有助于求解第4章中的逆解问题。从 ${}^{4}_{5}T$ 和 ${}^{5}_{6}T$ 相乘开始:

$$
{}^{4}_{6}T={}^{4}_{5}T\,{}^{5}_{6}T=\begin{bmatrix} c_5c_6 & -c_5s_6 & -s_5 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ s_5c_6 & -s_5s_6 & c_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3-10}
$$

式中c_5是$\cos\theta_5$的缩写，s_5是$\sin\theta_5$的缩写等等[⊖]。于是有:

$$
{}^{3}_{6}T={}^{3}_{4}T\,{}^{4}_{6}T=\begin{bmatrix} c_4c_5c_6-s_4s_6 & -c_4c_5s_6-s_4c_6 & -c_4s_5 & a_3 \\ s_5c_6 & -s_5s_6 & c_5 & d_4 \\ -s_4c_5c_6-c_4s_6 & s_4c_5s_6-c_4c_6 & s_4s_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3-11}
$$

81

因为关节2和关节3通常是平行的，所以 ${}^{1}_{2}T$ 和 ${}^{2}_{3}T$ 的乘积用二角和公式将得到一个简化的表达式。只要两个旋转关节轴平行就可以这样处理，因此得到:

$$
{}^{1}_{3}T={}^{1}_{2}T\,{}^{2}_{3}T=\begin{bmatrix} c_{23} & -s_{23} & 0 & a_2c_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ -s_{23} & -c_{23} & 0 & -a_2s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3-12}
$$

这里使用了二角和公式（见附录A):

$$
c_{23}=c_2c_3-s_2s_3
$$
$$
s_{23}=c_2s_3+s_2c_3
$$

则得:

$$
{}^{1}_{6}T={}^{1}_{3}T\,{}^{3}_{6}T=\begin{bmatrix} {}^{1}r_{11} & {}^{1}r_{12} & {}^{1}r_{13} & {}^{1}p_x \\ {}^{1}r_{21} & {}^{1}r_{22} & {}^{1}r_{23} & {}^{1}p_y \\ {}^{1}r_{31} & {}^{1}r_{32} & {}^{1}r_{33} & {}^{1}p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

式中:

$$
\begin{aligned}
{}^{1}r_{11}&=c_{23}[c_4c_5c_6-s_4s_6]-s_{23}s_5s_6\\
{}^{1}r_{21}&=-s_4c_5c_6-c_4s_6\\
{}^{1}r_{31}&=-s_{23}[c_4c_5c_6-s_4s_6]-c_{23}s_5c_6
\end{aligned} \tag{3-13}
$$

⊖ 这取决于表达式占用空间的大小，下列三种表示：$\cos\theta_5$、$c\theta_5$、c_5都是可以的。

$$
\begin{aligned}
{}^1r_{12} &= -c_{23}[c_4c_5s_6+s_4c_6]+s_{23}s_5s_6 \\
{}^1r_{22} &= s_4c_5s_6-c_4c_6 \\
{}^1r_{32} &= s_{23}[c_4c_5s_6+s_4c_6]+c_{23}s_5s_6 \\
{}^1r_{13} &= -c_{23}c_4s_5-s_{23}c_5 \\
{}^1r_{23} &= s_4s_5 \\
{}^1r_{33} &= s_{23}c_4s_5-c_{23}c_5 \\
{}^1p_x &= a_2c_2+a_3c_{23}-d_4s_{23} \\
{}^1p_y &= d_3 \\
{}^1p_x &= -a_3s_{23}-a_2s_2-d_4c_{23}
\end{aligned} \tag{3-13'}
$$

最后，得到六个连杆坐标变换矩阵的乘积：

$$
{}_6^0T={}_1^0T\,{}_6^1T=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

82

式中：

$$
\begin{aligned}
r_{11} &= c_1[c_{23}(c_4c_5c_6-s_4s_5)-s_{23}s_5c_5]+s_1(s_4c_5c_6+c_4s_6) \\
r_{21} &= s_1[c_{23}(c_4c_5c_6-s_4s_6)-s_{23}s_5c_6]-c_1(s_4c_5c_6+c_4s_6) \\
r_{31} &= -s_{23}(c_4c_5c_6-s_4s_6)-c_{23}s_5c_6 \\
r_{12} &= c_1[c_{23}(-c_4c_5s_6-s_4c_6)+s_{23}s_5s_6]+s_1(c_4c_6-s_4c_5s_6) \\
r_{22} &= s_1[c_{23}(-c_4c_5s_6-s_4c_6)+s_{23}s_5s_6]-c_1(c_4c_6-s_4c_5s_6) \\
r_{32} &= -s_{23}(-c_4c_5s_6-s_4c_6)+c_{23}s_5s_6 \\
r_{13} &= -c_1(c_{23}c_4s_5+s_{23}c_5)-s_1s_4s_5 \\
r_{23} &= -s_1(c_{23}c_4s_5+s_{23}c_5)+c_1s_4s_5 \\
r_{33} &= s_{23}c_4s_5-c_{23}c_5 \\
p_x &= c_1[a_2c_2+a_3c_{23}-d_4s_{23}]-d_3s_1 \\
p_y &= s_1[a_2c_2+a_3c_{23}-d_4s_{23}]+d_3c_1 \\
p_z &= -a_3s_{23}-a_2s_2-d_4c_{23}
\end{aligned} \tag{3-14}
$$

方程（3-14）构成PUMA560的运动学方程。它们说明如何计算机器人坐标系{6}相对于坐标系{0}的位姿。方程（3-14）是这个操作臂全部运动学分析的基本方程。

Yasukawa Motoman L-3

Yasukawa Motoman L-3是一个通用的五自由度工业操作臂（见图3-22）。与前面的例子不同，Motoman机器人不是一个简单的开环运动链，而是将两个线性驱动器通过四杆机构将连杆2和3耦合连接。通过链传动，关节4和关节5由两个不同位置上的驱动器驱动。

在本例中，我们分两步求解运动学问题。第一步，我们根据驱动器的位置计算关节角度；第二步，我们根据关节角度计算末端连杆的笛卡儿位姿。在第二步中，我们把此系统看

作是一个简单的5R开环运动链来讨论。

图3-23所示的连杆机构把驱动器2连接到机器人的连杆2和连杆3上。驱动器是一个线性驱动器，它直接控制DC线段的长度。三角形ABC是不变的，因此BD的长度不变。当连杆运动时，关节2绕点B转动，驱动器绕点C作微小转动。下面对与驱动器2相关的常数（长度和角度）加以定义：

$$\gamma_2 = AB, \phi_2 = AC, \alpha_2 = BC$$
$$\beta_2 = BD, \Omega_2 = \angle JBD, l_2 = BJ$$

83

给下列变量定义：

$$\theta_2 = -\angle JBQ, \psi_2 = \angle CBD, g_2 = DC$$

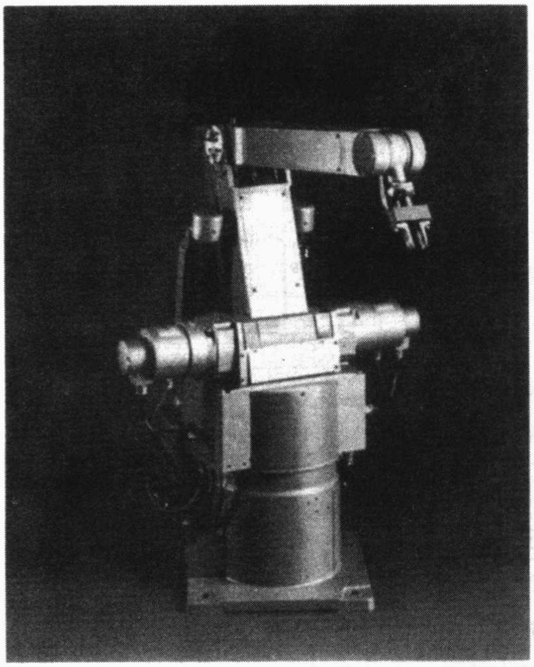


图3-22 Yasukawa Motoman L-3机器人，经Yasukawa公司许可

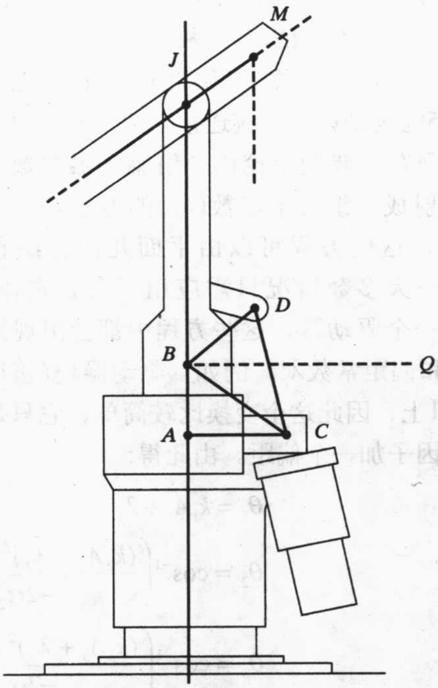


图3-23 Yasukawa驱动器和连杆2的运动示意图

图3-24所示的连杆机构把驱动器3连接到机器人的连杆2和连杆3上。驱动器是一个线性驱动器，它控制HG线段的长度。三角形EFG是不变的，因此FH的长度不变。当连杆运动时，关节3绕点J转动，驱动器绕点G作微小转动。下面对与驱动器3相关的常数（长度和角度）加以定义：

$$\gamma_3 = EF, \ \phi_3 = EG, \alpha_3 = GF$$
$$\beta_3 = HF, \ l_3 = JK$$

给下列变量定义：

$$\theta_3 = \angle PJK, \psi_3 = \angle GFH, g_3 = GH$$

驱动器和连杆的布局具有以下功能特点。驱动器2对关节2进行位置控制，此时，连杆3的姿态相对于机器人基座不变。驱动器3对连杆3相对于机器人基座进行姿态调节（而不是像串

联型机器人那样相对于前一个连杆)。这种连杆布局的目的是为了加强机器人主要连杆的结构刚度，通常是为了提高机器人的定位精度。

关节4和关节5的驱动器固连在机器人的连杆1上，它们的轴线与关节2的轴线平行（图3-23和图3-24中的B点和F点)。它们通过两组传动链驱动腕关节，一组在连杆2的内部，另一组在连杆3的内部。在连杆2和连杆3的驱动器的共同作用下，此传动系统的功能如下：驱动器4相对于机器人基座对关节4进行位置控制，不是相对于前面的连杆3，这使得驱动器4的姿态不变，从而保证连杆4相对于机器人基座的姿态不变，而且与关节2和关节3的位置无关。驱动器5的运动如同直接连接在关节5上一样。

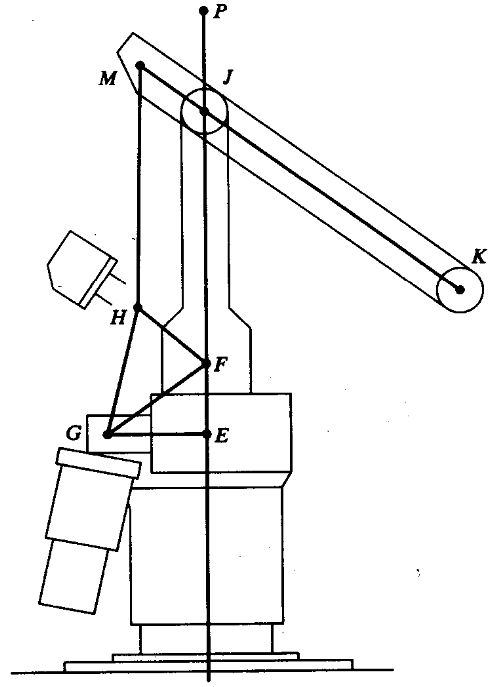


图3-24 Yasukawa驱动器和连杆3的运动示意图

现在，我们讨论由一组驱动器参数(A_i)等效映射成一组关节参数(θ_i)的方程。在这种情况下，这些方程可以由平面几何方法直接得出——大多数情况只需应用“余弦定律”⊖。对每一个驱动器，这些方程中都会出现比例常数k_i和偏距常数λ_i。例如，驱动器1直接连在关节轴1上，因此这个变换比较简单，它只是一个比例因子加一个偏距。由此得：

$$
\begin{aligned}
\theta_1 &= k_1A_1+\lambda_1 \\
\theta_2 &= \cos^{-1}\left(\frac{(k_2A_2+\lambda_2)^2-\alpha_2^2-\beta_2^2}{-2\alpha_2\beta_2}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\phi_2}{\gamma_2}\right)+\Omega_2-270^\circ \\
\theta_3 &= \cos^{-1}\left(\frac{(k_3A_3+\lambda_3)^2-\alpha_3^2-\beta_3^2}{-2\alpha_3\beta_3}\right)-\theta_2+\tan^{-1}\left(\frac{\phi_3}{\gamma_3}\right)-90^\circ \\
\theta_4 &= -k_4A_4-\theta_2-\theta_3+\lambda_4+180^\circ \\
\theta_5 &= -k_5A_5+\lambda_5
\end{aligned}
\tag{3-15}
$$

84~86 图3-25所示为连杆坐标系。图中所示的操作臂的位置对应于关节矢量Θ=(0, − 90°, 90°, 90°,0)。图3-26所示为操作臂的连杆参数。求得的连杆变换矩阵为：

$$
{}^0_1T=\begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3-16}
$$

⊖ 如果一个三角形的三个角分别为a, b和c，角a与边A相对，以此类推。那么有$A^2=B^2+C^2-2BC\cos a$。

$$
{}^{1}_{2}T=\begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_2 & -c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{2}_{3}T=\begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & l_2 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{3}_{4}T=\begin{bmatrix} c\theta_4 & -s\theta_4 & 0 & l_3 \\ s\theta_4 & c\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (3\text{-}16')
$$

$$
{}^{4}_{5}T=\begin{bmatrix} c\theta_5 & -s\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s\theta_5 & c\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

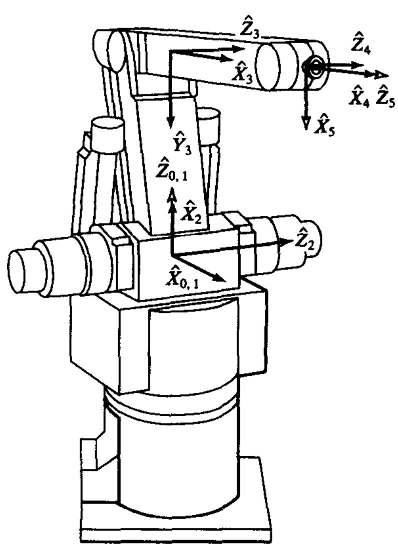


图3-25 Yasukawa L-3机器人的连杆坐标系布局

i	α_i-1	a_i-1	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	−90°	0	0	θ_2
3	0	L_2	0	θ_3
4	0	L_3	0	θ_4
5	90°	0	0	θ_5

图3-26 Yasukawa L-3 操作臂的连杆参数表

由式（3-16）的矩阵相乘得到 ${}^{0}_{5}T$：

$$
{}^{0}_{5}T=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

式中:

$$
\begin{aligned}
r_{11} &= c_1c_{234}c_5 - s_1s_5 \\
r_{21} &= s_1c_{234}c_5 + c_1s_5 \\
r_{31} &= -s_{234}c_5 \\
r_{12} &= -c_1c_{234}s_5 - s_1c_5 \\
r_{22} &= -s_1c_{234}s_5 + c_1c_5 \\
r_{32} &= s_{234}s_5 \\
r_{13} &= c_1s_{234} \\
r_{23} &= s_1s_{234} \\
r_{33} &= c_{234} \\
p_x &= c_1(l_2c_2 + l_3c_{23}) \\
p_y &= s_1(l_2c_2 + l_3c_{23}) \\
p_z &= -l_2s_2 - l_3s_{23}
\end{aligned} \tag{3-17}
$$

87~88

我们通过两步计算得到Yasukawa Motoman机器人的运动学方程。第一步，由驱动器矢量计算关节矢量；第二步，由关节矢量计算腕部坐标系的位姿。如果只要求计算笛卡儿坐标系中的位置而不需要计算关节角度，那么可以推导由驱动器空间直接向笛卡儿空间映射的方程。这些方程在一定程度比两步方法计算稍微简单一些（见习题3.10）。

3.8 坐标系的标准命名

为了规范起见，有必要给机器人和工作空间专门命名和确定专门的“标准”坐标系。图3-27所示为一典型的情况，机器人抓持某种工具，并把工具末端移动到操作者指定的位置。图3-27所示的五个坐标系就是需要进行命名的坐标系。这五个坐标系的命名以及随后在机器人的编程和控制系统中的应用都以简单易懂的特点提供了一种通用性。所有机器人的运动都将按照这些坐标系描述。

下图3-27所示为坐标系的简化定义。

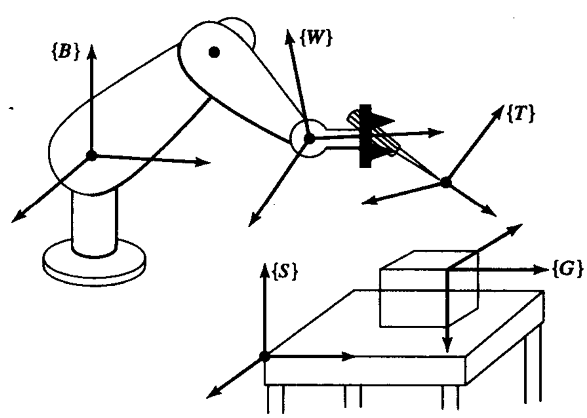


图3-27 标准坐标系

基坐标系{B}

基坐标系{B}位于操作臂的基座上。它仅是赋予坐标系{0}的另一个名称。因为它固连在
89 机器人的静止部位，所以有时称为连杆0。

工作台坐标系{S}

工作台坐标系{S}的位置与任务相关。在图3-28中，它位于机器人工作台的一个角上。对机器人系统的用户来说，工作台坐标系{S}是一个通用坐标系，机器人所有的运动都是相对于它来执行的。有时称它为任务坐标系、世界坐标系或通用坐标系。工作台坐标系通常根据基坐标系确定，即${}_S^BT$。

腕部坐标系{W}

腕部坐标系{W}附于操作臂的末端连杆。这个固连在机器人末端连杆上的坐标系也可以称为坐标系{N}。大多数情况，腕部坐标系{W}的原点位于操作臂手腕上，它随着操作臂的末端连杆移动。它相对于基坐标系定义，即{W}=${}_W^BT={}_N^0T$。

工具坐标系{T}

工具坐标系{T}附于机器人所夹持工具的末端。当手部没有夹持工具时，工具坐标系{T}的原点位于机器人的指端之间。工具坐标系通常根据腕部坐标系来确定。在图3-28中，工具坐标系的原点定义在机器人抓持销轴的末端。

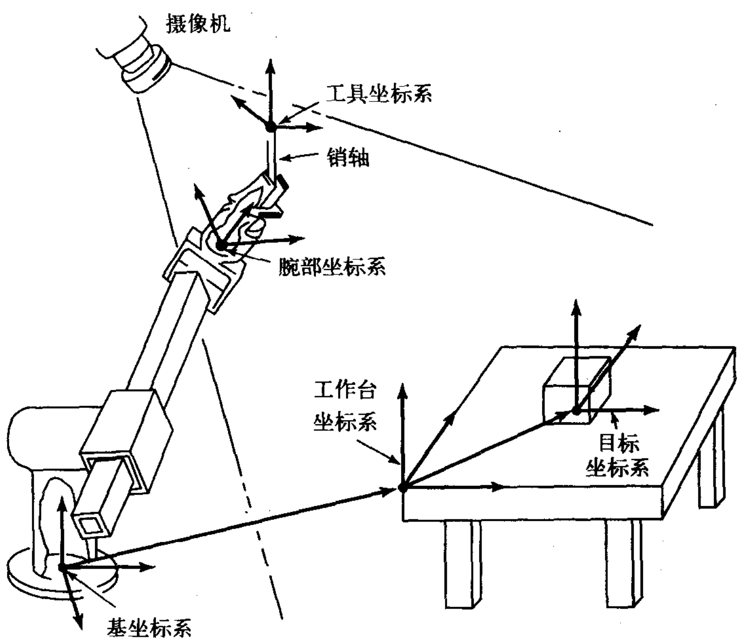


图3-28 标准坐标系布局示例

90

目标坐标系{G}

目标坐标系{G}是机器人移动工具时对工具位置的描述。特指在机器人运动结束时，工具坐标系应当与目标坐标系重合。目标坐标系{G}通常根据工作台坐标系来确定。在图3-28中，目标坐标系位于将要插入销轴的轴孔处。

不失一般性而言，所有机器人的运动都可以按照这些坐标系描述，它们为描述机器人的

操作提供了一个标准语言。

3.9 工具的定位

机器人的首要功能之一是能够计算它所夹持的工具（或未夹持工具）相对于规范坐标系的位姿，也就是说需要计算工具坐标系$\{T\}$相对于工作台坐标系$\{S\}$的变换矩阵。只要通过运动学方程计算出${}^B_W T$，就可以应用第2章所述的笛卡儿变换计算$\{T\}$相对于$\{S\}$的变换矩阵。求解一个简单的变换方程，得出

$${}^S_T T = {}^B_S T^{-1}\, {}^B_W T\, {}^W_T T \tag{3-18}$$

方程（3-18）在某些机器人系统中称为WHERE函数，用它可计算手臂的位置。对于图3-28中情况，WHERE的输出是轴销相对于工作台顶角处的位姿。

方程（3-18）是广义运动学方程。根据连杆的几何形状，由基座端（可看成一个固定连杆）的广义变换矩阵（${}^B_S T$）和另一端的执行器坐标变换矩阵（${}^W_T T$）可以计算运动学方程。这些附加变换可以包括工具的偏距和转角，且适用于任意固定坐标系。

3.10 计算问题

在许多实际的操作臂系统中，求解运动学方程所需的时间是一个必须考虑的问题。在本节中，我们将依照PUMA560机器人，简单讨论有关操作臂运动学计算的几个问题，以式（3-14）为例。

一种选择就是使用定点或浮点数表示相关的变量。为便于软件编制，许多计算采用浮点运算，因为程序员不需考虑进行标量运算时变量所占用的相对范围。然而，在对速度要求比较严格的情况下，可以采用定点数表示法，因为变量的变化范围比较小，而且变化范围很容易确定。粗略估计一下定点数表示法计算所需的位数一般不会超过24位[4]。

通过分量方程，例如（3-14），利用局部变量可以减少乘和加的次数（这样做是经济的），
91 这是为了避免计算机重复运行相同的语句。分量方程[5]已在工厂的计算机辅助制造中得到应用。

运动学计算的主要耗时是计算超越函数（正弦和余弦）。当这些函数作为标准库的一部分时，常需要以成倍的耗时进行一系列展开式的计算。这时操作系统可以提供一些内存，用查表的方式计算超越函数。利用这种方法，可将计算正弦或余弦所需时间减少1/2到1/3以上[6]。

式（3-14）中的运动学计算是冗余的，式中求解姿态需要计算9个变量。通常减少计算量的方法是仅计算旋转矩阵的两列，然后计算叉乘（仅需要6次相乘和3次相加）得到矩阵的第三列。显然，要选择比较简单的两列去计算。

参考文献

[1] J. Denavit and R.S. Hartenberg, "A Kinematic Notation for Lower-Pair Mechanisms Based on Matrices," *Journal of Applied Mechanics*, pp. 215–221, June 1955.

[2] J. Lenarčič, "Kinematics," in *The International Encyclopedia of Robotics*, R. Dorf and S. Nof, Editors, John C. Wiley and Sons, New York, 1988.

[3] J. Colson and N.D. Perreira, "Kinematic Arrangements Used in Industrial Robots," *13th Industrial Robots Conference Proceedings*, April 1983.

[4] T. Turner, J. Craig, and W. Gruver, "A Microprocessor Architecture for Advanced

Robot Control," 14th ISIR, Stockholm, Sweden, October 1984.

[5] W. Schiehlen, "Computer Generation of Equations of Motion," in *Computer Aided Analysis and Optimization of Mechanical System Dynamics*, E.J. Haug, Editor, Springer-Verlag, Berlin & New York, 1984.

[6] C. Ruoff, "Fast Trigonometric Functions for Robot Control," *Robotics Age*, November 1981.

习题

3.1 [15]计算例3.3中平面操作臂的运动学方程。

3.2 [37]一个与PUMA560相似的操作臂，其中关节3由移动关节代替。假定图3-18中移动关节可沿 $\hat{X}_1$ 方向滑移，但是这里仍有一个等效偏距 d_3 需要考虑，给出一个必要的附加条件，求解运动学方程。

3.3 [25]图3-29所示为三自由度手臂，与例3.3的操作臂相似，其中关节轴1与另外两轴不平行。轴1和轴2之间的夹角为90°，求解连杆参数和运动学方程 ${}^{B}_{W}T$ 。注意不需要定义l_3。

3.4 [22]图3-30所示为三自由度机械臂，关节1和关节2相互垂直，关节2和关节3相互平行。如图所示，所有关节都处于初始位置。关节转角的正方向都已标出。在这个操作臂的简图中定义了连杆坐标系{0}到{3}，并表示在图中。求变换矩阵 ${}^{0}_{1}T, {}^{1}_{2}T$ 和 ${}^{2}_{3}T$ 。

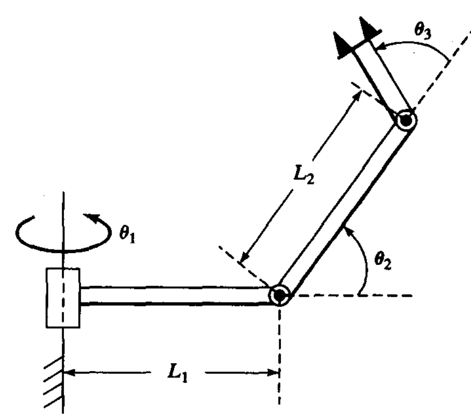


图3-29 3R非平面操作臂（习题3.3）

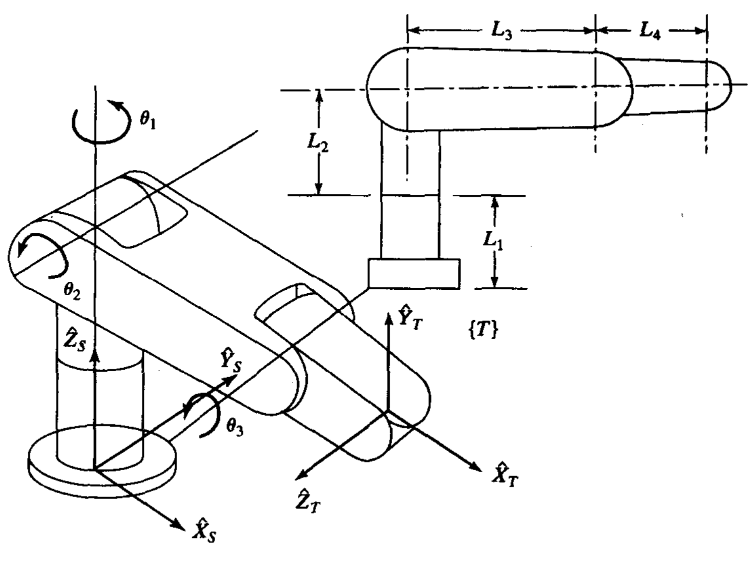


图3-30 3R操作臂的两个视图（习题3.4）

3.5 [26]编写一个计算PUMA560运动学方程的子程序，为提高运算速度，尽量减少相乘的次数。

使用程序引导（与C语言相似）

92~93 **Procedure KIN(VAR theta: vec6; VAR wrelb: frame);**

计算正弦或余弦估计需要5倍的时间，计算加法估计需要三分之一的时间以及赋值语句需要五分之一的时间。计算平方根需要4倍的时间。你需要几倍的时间？

3.6 [20]编写一个子程序，计算例3.4中圆柱坐标型操作臂的运动学方程，使用程序引导（与C语言相似）

Procedure KIN(VAR jointvar: vec3; VAR wrelb: frames);

计算正弦或余弦估计需要5倍的时间，计算加法估计需要三分之一的时间以及赋值语句需要五分之一的时间。计算平方根需要4倍的时间。你需要几倍的时间？

3.7 [22]编写一个子程序，计算例3.3中操作臂的运动学方程，使用程序引导（与C语言相似）

Procedure KIN(VAR theta: vec3; VAR wrelb: frame);

计算正弦或余弦估计需要5倍的时间，计算加法估计需要三分之一的时间以及赋值语句需要五分之一的时间。计算平方根需要4倍的时间。你需要几倍的时间？

3.8 [13]在图3-31中，没有确知工具的位置 ${}^{W}_{T}T$。机器人利用力控制对工具末端进行检测直到把工件插入位于 ${}^{S}_{G}T$ 的孔中（即目标）。在这个“标定”过程中（坐标系$\{G\}$和坐标系$\{T\}$是重合的），通过读取关节角度传感器，进行运动学计算得到机器人的位置 ${}^{B}_{W}T$。假定已知 ${}^{B}_{S}T$ 和 ${}^{S}_{G}T$，求计算未知工具坐标系 ${}^{W}_{T}T$ 的变换方程。

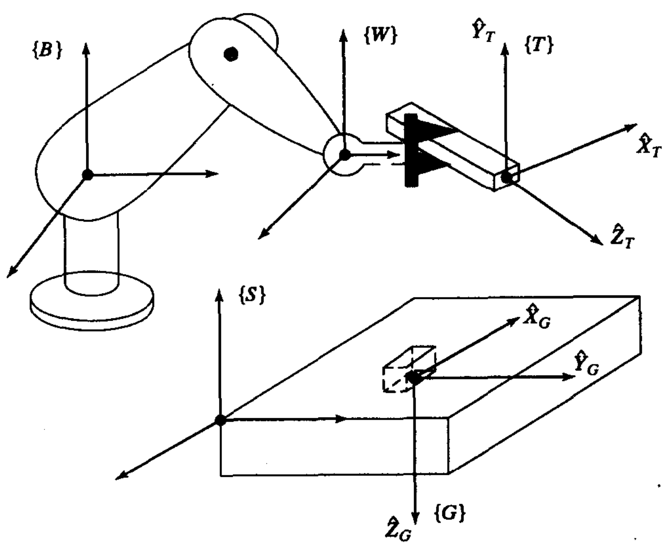
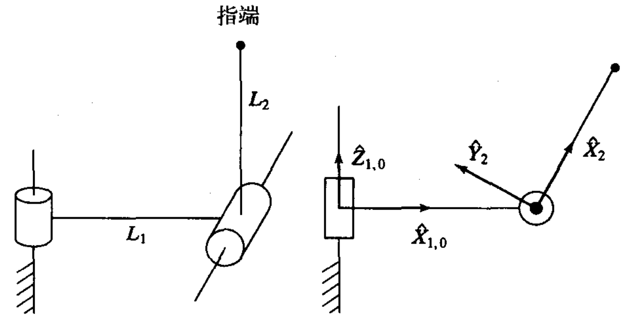


图3-31 工具坐标系的确定（习题3.8）

3.9 [11]图3-32(a)所示的两连杆操作臂，已知连杆的坐标变换矩阵为 ${}^{0}_{1}T$和 ${}^{1}_{2}T$。相乘的结果为：

$$
{}^{0}_{2}T=\begin{bmatrix} c\theta_1 c\theta_2 & -c\theta_1 s\theta_2 & s\theta_1 & l_1 c\theta_1 \\ s\theta_1 c\theta_2 & -s\theta_1 s\theta_2 & -c\theta_1 & l_1 s\theta_1 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

图3-32(b)示出了连杆坐标系的布局。当θ_1=0时，坐标系{0}和坐标系{1}重合。第二个连杆的长度为l_2。求操作臂末端相对于坐标系{0}的矢量表达式 $^{0}P_{tip}$ 。



(a) (b)

图3-32 标有坐标系布局的两连杆操作臂（习题3.9）

3.10 [39]推导Yasukawa Motoman 机器人的运动学方程（见3.7节）。要求由驱动器的参数直接计算出腕部坐标系的位姿，而不用先计算关节角度。此求解过程需要33次乘法、2次求平方根和6次正弦或余弦计算。

3.11 [17]图3-33所示为某一机器人腕部的示意图，它有三个相交但不正交的轴。给出腕部的连杆坐标系（类似于3自由度操作臂），并求连杆参数。

3.12 [08]是否任意一个刚体的坐标变换都可以按照方程（3-6）的形式用四个参数(a, α, d, θ)给出?

3.13 [15]建立图3-34所示的5自由度操作臂的连杆坐标系。

3.14 [20]空间的任意两条直线的相对位置都可以用两个参数来表达，a和α，其中a是连接这两条直线的公垂线的长度，角α是两个轴线在与公垂线正交的平面上的投影的夹角。已知，一条直线通过P点，用单位矢量 $\hat{m}$ 表示其方向；另一条直线通过q点，用单位矢量$\hat{n}$表示其方向，写出a和α的表达式。

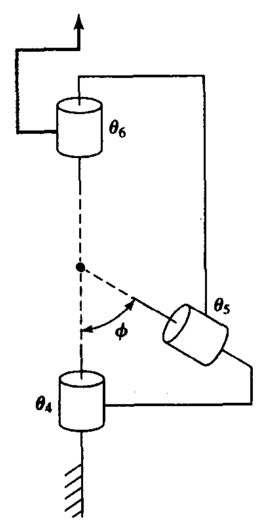


图3-33 3R非正交轴机器人（习题3.11）

3.15 [15]建立图3-35中的3自由度操作臂的连杆坐标系。

3.16 [15]建立图3-36中RPR平面机器人的连杆坐标系，并给出连杆参数。

3.17 [15]建立图3-37中的三连杆机器人的连杆坐标系。

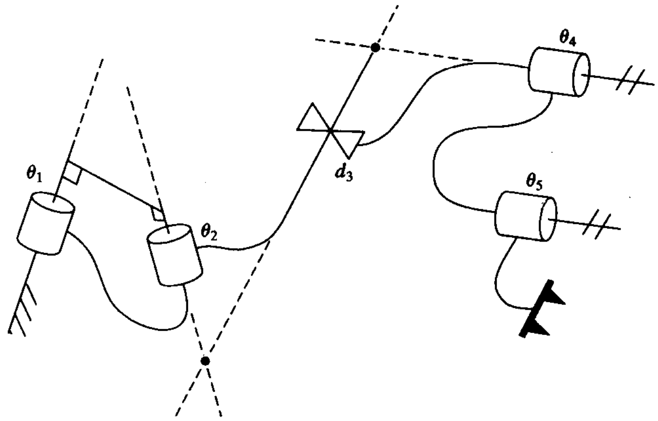
3.18 [15]建立图3-38中三连杆机器人的连杆坐标系。

3.19 [15]建立图3-39中三连杆机器人的连杆坐标系。

3.20 [15]建立图3-40中三连杆机器人的连杆坐标系。

3.21 [15]建立图3-41中三连杆机器人的连杆坐标系。

3.22 [18]建立图3-42中P3R机器人的连杆坐标系。在确定坐标系的布局后，确定d_2、d_3和a_2的符号。



94~96

图3-34 2RP2R操作臂示意图（习题3.13）

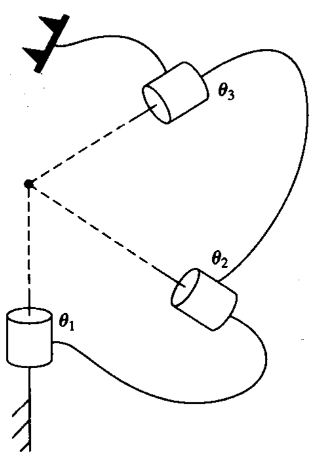


图3-35 3R操作臂示意图（习题3.15）

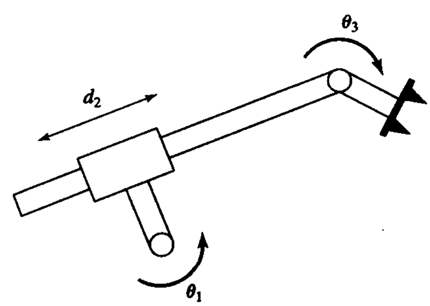


图3-36 RPR平面机器人（习题3.16）

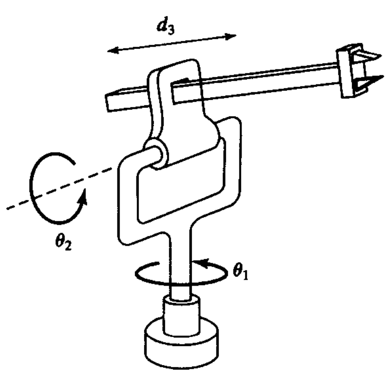


图3-37 三连杆RRP操作臂（习题3.17）

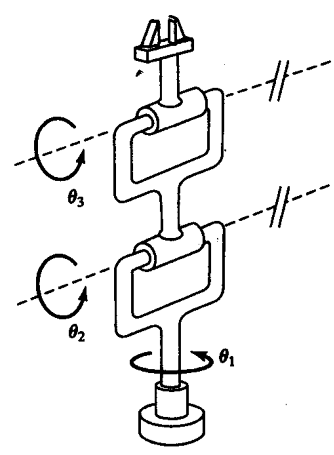


图3-38 三连杆 RRR操作臂（习题3.18）

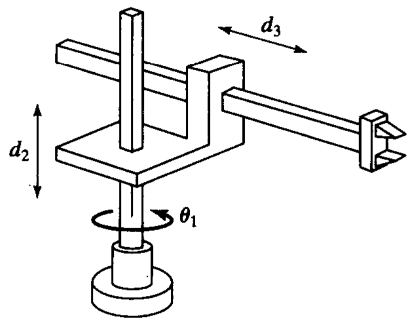


图3-39 三连杆 RPP操作臂（习题3.19）

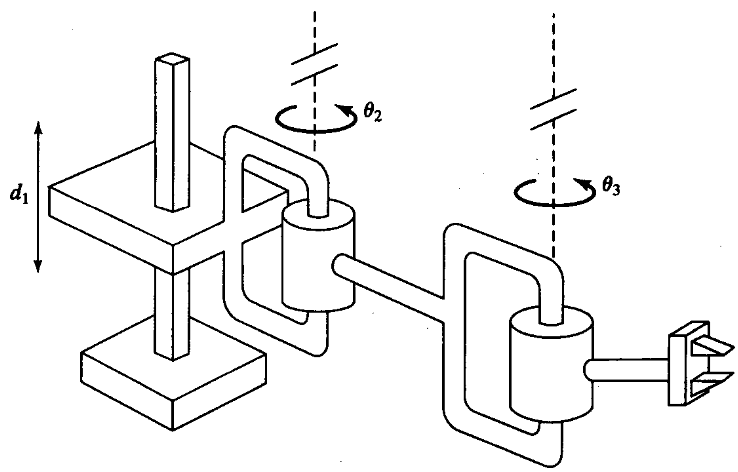


图3-40 三连杆 PRR操作臂（习题3.20）

97
~
98

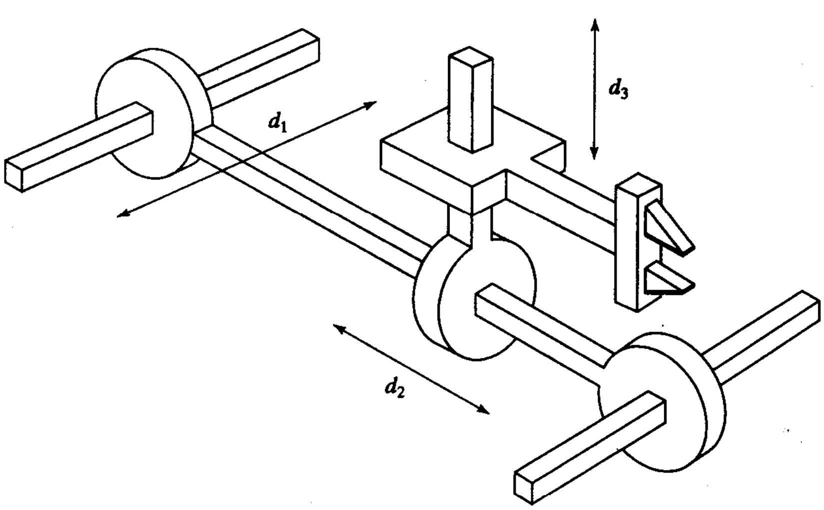


图3-41 三连杆 PPP操作臂（习题3.21）

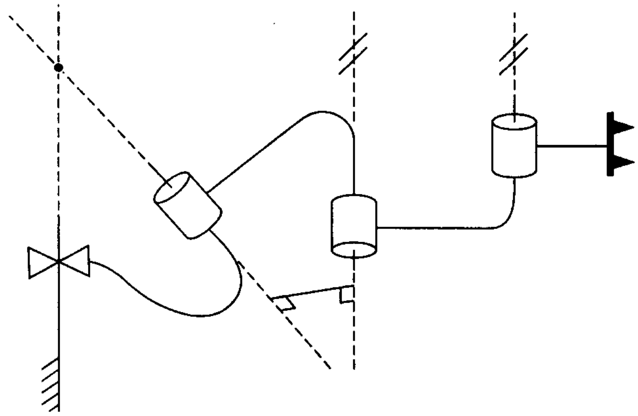


图3-42 P3R操作臂示意图（习题3.22）

编程习题

1. 写一子程序，计算例3.3中平面3R机器人的运动学方程，其输入为关节角度，输出为坐标系（腕部坐标系相对于基坐标系）的变换矩阵。使用程序引导（与C语言相似）

```
Procedure KIN(VAR theta: vec3; VAR wrelb: frame);
```

在这里变量“wrelb”是腕部坐标系相对于基坐标系的变换矩阵 ${}^B_WT$ 。这种“坐标系”由一个2 × 2的旋转矩阵和一个2 × 1的位置矢量组成。如果需要，可以用3 × 3的齐次变换矩阵表
99 示这个坐标系，该矩阵的第三行为[0 0 1]。（这个操作臂的参数：l_1=l_2=0.5米）。

2. 写一子程序，计算工具相对于固定坐标系的位置。其输入为关节角度矢量。

```
Procedure WHERE(VAR theta: vec3; VAR trels: frame);
```

显然，必须用工具坐标系和机器人基坐标系的描述“WHERE”计算工具相对于固定坐标系的位置。${}^W_TT$ 和 ${}^S_BT$ 的值应存储于主内存中（或作为第二种选择，可以把它们作为WHERE中的自变量）。

3. 对于某个任务，工具坐标系和固定坐标系可由用户按下述定义：

$$ {}^W_TT=[x\ y\ \theta]=[0.1\ 0.2\ 30.0] $$

$$ {}^B_ST=[x\ y\ \theta]=[-0.1\ 0.3\ 0.0] $$

按照下列机械手的三个位形（单位为度），计算工具相对于固定坐标系的位姿：

$$ [\theta_1\ \theta_2\ \theta_3]=[0.0\ 90.0\ -90.0] $$

$$ [\theta_1\ \theta_2\ \theta_3]=[-23.6\ -30.3\ 48.0] $$

$$ [\theta_1\ \theta_2\ \theta_3]=[130.0\ 40.0\ 12.0] $$

MATLAB习题

本练习主要讨论平面3自由度、3R机器人的DH坐标参数和正向（位姿）运动学变换方程（见图3-6和图3-7）。已知下列固定长度参数：L_1=4, L_2=3和L_3=2（米）。

a) 求DH参数。可以根据图3-8检查计算结果。

b) 推导相邻的齐次变换矩阵 ${}^{i-1}_{\ \ i}T, i=1,2,3$ ，它们是关节角度变量θ_i 的函数，i=1, 2, 3。用试

探法推导常量矩阵 ${}^{3}_{H}T$ 。这里，{H}的原点在夹爪手指的中心，{H}的姿态与{3}的姿态相同。

c) 用MATLAB符号法求正向运动学解 ${}^{0}_{3}T$ 和 ${}^{0}_{H}T$ （θ_i 的函数）。用s_i=sin(θ_i), c_i=cos(θ_i)等简写你的结果。由于Z_i 轴相互平行，因此可以用二角和公式将(θ_1+θ_2+θ_3)简写。用MATLAB计算正向运动学解（ ${}^{0}_{3}T$ 和 ${}^{0}_{H}T$ ）。输入参数为:

i) $\Theta = \{\theta_1\ \theta_2\ \theta_3\}^T = \{0\ 0\ 0\}^T$

ii) $\Theta = \{10^\circ\ 20^\circ 30^\circ\}^T$

iii) $\Theta = \{90^\circ\ 90^\circ\ 90^\circ\}^T$

对于这三种情况，可以利用操作臂位形简图校核结果，用试探法推导正向运动学变换（参考由旋转矩阵和位置矢量定义 ${}^{0}_{H}T$的方法）。简图中包括坐标系{H}，{3}和{0}。

d) 用Corke MATLAB Robotics工具箱检验计算结果。试用函数*link*()，*robot*()和*fkine*()。 100

第4章　操作臂逆运动学

4.1　概述

在上一章中讨论了已知操作臂的关节角，计算工具坐标系相对于用户工作台坐标系的位置和姿态的问题。在本章中，将研究难度更大的运动学逆问题：已知工具坐标系相对于工作台坐标系的期望位置和姿态，如何计算一系列满足期望要求的关节角？第3章重点讨论操作臂的**运动学正问题**，而本章重点讨论操作臂的**运动学逆问题**。

为求出要求的关节角以放置相对于工作台坐标系$\{S\}$的工具坐标系$\{T\}$，可将这个问题分为两部分：首先，进行坐标变换求出相对于基坐标系$\{B\}$的腕部坐标系$\{W\}$；然后应用逆运动学求关节角。

4.2　可解性

求解操作臂运动学方程是一个非线性问题。已知 ${}^{0}_{N}T$ 的数值，试图求出θ_1, θ_2, …, θ_n。考虑式（3.14）给出的方程。对于PUMA560操作臂来说，目前对这个问题的确切表述如下：已知 ${}^{0}_{6}T$ 的16个数值（其中4个无意义），求解式（3.14）的6个关节角θ_1~θ_6。

对于具有6个自由度的操作臂（对应于方程（3.14））来说，有12个方程，其中6个是未知
101 的。而且在由 ${}^{0}_{6}T$ 的旋转矩阵分量生成的9个方程中，只有3个是独立的。将这3个方程与由 ${}^{0}_{6}T$ 的位置矢量分量生成的3个方程相加，总共给出的6个方程，其中含有6个未知量。这些方程为非线性超越方程，很难求解。方程组（3.14）所描述的机器人的连杆参数很简单，多个α_i是0或±90度，许多连杆偏距和长度分别为0。显而易见，一般6自由度机构（所有连杆参数均不为0）的运动方程要比（3.14）复杂得多。同任何非线性方程组一样，我们必须考虑其解的存在性、多重解性以及求解方法。

解的存在性

解是否存在的问题完全取决于操作臂的**工作空间**。简单地说，工作空间是操作臂末端执行器所能到达的范围。若解存在，则被指定的目标点必须在工作空间内。有时下面两种工作空间的定义也是很有用的：**灵巧工作空间**指机器人的末端执行器能够从各个方向到达的空间区域。也就是说，机器人末端执行器可以从任意方向到达灵巧工作空间的每一个点。**可达工作区间**是机器人至少从一个方向上有一个方位可以达到的空间。显然，灵巧工作空间是可达工作空间的子集。

现在讨论图4-1所示两连杆操作臂的工作空间。如果$l_1=l_2$，则可达工作空间是半径为$2l_1$的圆，而灵巧工作空间仅是单独的一点，即原点。如果$l_1 \neq l_2$，则不存在灵巧工作空间，而可达工作空间为一外径为l_1+l_2、内径为$|l_1-l_2|$的圆环。在可达工作空间内部，末端执行器有两种可能的方位，在工作空间的边界上只有一种可能的方位。

这里讨论的两连杆操作臂的工作空间是假设所有关节能够旋转360度，这在实际机构中是很少见的。当关节旋转角度不能达到360度时，显然工作空间的范围或可能的姿态的数目相应减小。例如，对于图4-1所示的操作臂，θ_1的运动范围为360度，但只有当$0 \leqslant \theta_2 \leqslant 180°$时，可达工作空间才具有相同的范围，而此时仅有一个方位可以达到工作空间的每一个点。

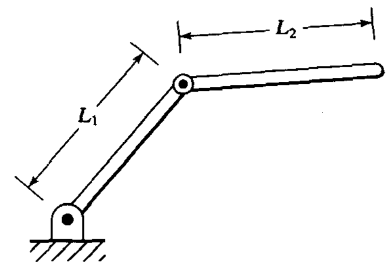


图4-1 连杆长度为l_1和l_2的两连杆操作臂

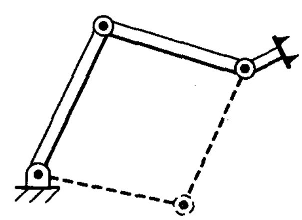
当一个操作臂少于6自由度时，它在三维空间内不能达到全部位姿。显然，图4-1中的平面操作臂不能伸出平面，因此凡是Z坐标不为0的目标点均不可达。在很多实际情况中，具有四个或五个自由度的操作臂能够超出平面操作，但显然不能达到全部目标点。必须研究这种操作臂以便弄清楚它的工作空间。通常这种机器人的工作空间是一个子空间，这个空间是由特定的机器人的工作空间确定的。一个值得研究的问题是，对于少于6个自由度的操作臂来说，给定一个确定的一般目标坐标系，什么是最近的可达目标坐标系？

工作空间也取决于工具坐标系的变换，因为所讨论的工具端点一般就是我们所说的可达空间点。一般来说，工具坐标系的变换与操作臂的运动学和逆向运动学无关，所以一般常去研究腕部坐标系$\{W\}$的工作空间。对于一个给定的末端执行器，定义工具坐标系$\{T\}$，给定目标坐标系$\{G\}$，去计算相应的坐标系$\{W\}$。接着我们会问：$\{W\}$的期望位姿是否在这个工作空间内？这里，我们所研究的工作空间（从计算的角度出发）与用户关心的工作空间是有区别的，用户关心的是末端执行器的工作空间（$\{T\}$坐标系）。

如果腕部坐标系的期望位姿在这个工作空间内，那么至少存在一个解。

多重解问题

在求解运动学方程时可能遇到的另一个问题就是多重解问题。一个具有3个旋转关节的平面操作臂，由于从任何方位均可到达工作空间内的任何位置，因此在平面中有较大的灵巧工作空间（给定适当的连杆长度和大的关节运动范围）。图4-2所示为在某一位姿下带有末端执行器的三连杆平面操作臂。虚线表示第二个可能的位形，在这个位形下，末端操作器的可达位姿与第一个位形相同。


图4-2 三连杆操作臂，虚线代表第二个解 102~103

因为系统最终只能选择一个解，因此操作臂的多重解现象会产生一些问题。解的选择标准是变化的，然而比较合理的选择应当是取“最短行程”解。例如，在图4-3中，如果操作臂处于点A，我们希望它移动到点B，最近解就是使得每一个运动关节的移动量最小。因此，在没有障碍的情况下，可选择图4-3中上部虚线所示的位形，这表明对于操作臂的当前位置来说只需要对逆运动学程序输入一个小位移量即可。这样，利

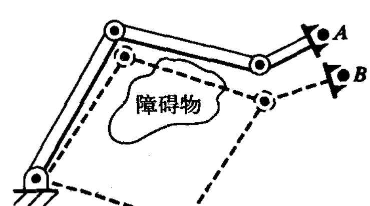


图4-3 到达B点有两个解，其中一个解会引起干涉

用算法能够选择关节空间内的最短行程解。但是，“最短行程”解可能有几种确定方式。例如，典型的机器人有3个大连杆，附带3个小连杆，姿态连杆靠近末端执行器。这样，在计算“最短行程”解时需要加权，使得这种选择侧重于移动小连杆而不是移动大连杆。在存在障碍的情况下，“最短行程”解可能发生干涉，这时只能选择“较长行程”解—为此，一般我们需要计算全部可能的解。这样，在图4-3中，障碍的存在意味着需要按照下部虚线所示的位形才能到达B点。

解的个数取决于操作臂的关节数量，它也是连杆参数（对于旋转关节操作臂来说为α_i、a_i和d_i）和关节运动范围的函数。例如，PUMA560机器人到达一个确定的目标有8个不同的解，图4-4所示为其中的4个解，它们对于手部来说具有相同的位姿。对于图中所示的每一个解，存在另外一种解，其中最后三个关节变为另外一种位形，如下式所示：

$$\begin{aligned}\theta_4' &= \theta_4 + 180^\circ \\ \theta_5' &= -\theta_5 \\ \theta_6' &= \theta_6 + 180^\circ\end{aligned} \tag{4-1}$$

总之，对于一个操作目标共有8个解。由于关节运动范围的限制，这8个解中的某些解是不能
104 实现的。

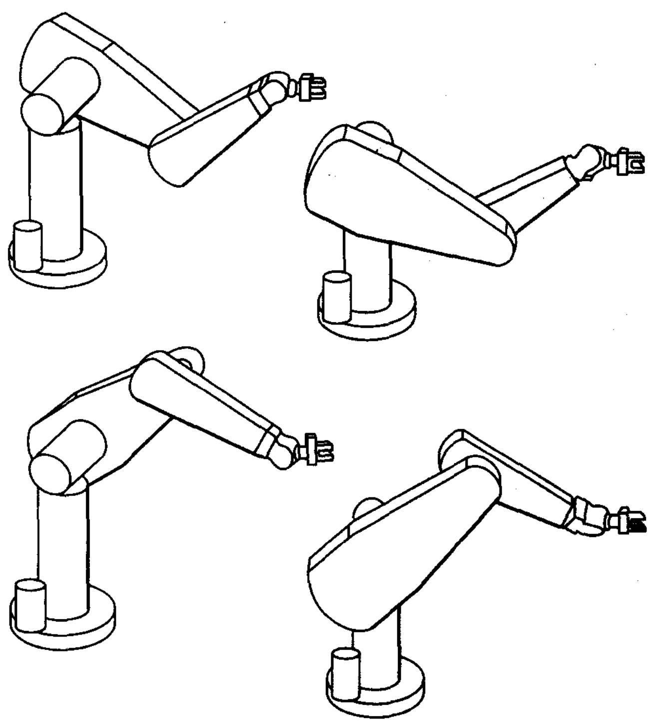


图4-4 PUMA560的4个解

通常，连杆的非零参数越多，达到某一特定目标的方式也越多。以一个具有6个旋转关节的操作臂为例，图4-5表明解的最大数目与等于零的连杆长度参数(a_i)的数目有关。非零参数越多，解的最大数目就越大。对于一个全部为旋转关节的6自由度操作臂来说，可能多达16种解[1, 6]。

解法

与线性方程组不同，非线性方程组没有通用的求解算法。针对解法问题，最好对已知操作臂“解”的构成形式加以定义。

如果关节变量能够通过一种算法确定，这种算法可以求出与已知位姿相关的全部关节变量，那么操作臂便是可解的[2]。

a_i	解的个数
$a_1 = a_3 = a_5 = 0$	≤ 4
$a_3 = a_5 = 0$	≤ 8
$a_3 = 0$	≤ 16
所有的 $a_i \neq 0$	≤ 16

图4-5 解的个数与非零的a_i

对于多重解情况，这个定义的核心正是我们所需要的，因为它可以求得所有的解。因此，在求解操作臂问题时不必考虑具体的数值迭代过程，即这些方法并不能保证求出全部的解。

我们把操作臂的全部求解方法分成两大类：**封闭解**和**数值解法**。由于数值解法的迭代性质，因此它一般要比相应的封闭解法的求解速度慢得多。实际上在大多数情况下，我们并不喜欢用数值解法求解运动学问题。对运动学方程的数值迭代解法本身已构成一个完整的研究领域（参见[6、11、12]），这已超出本书的范围。

下面主要讨论封闭解法。在本书中，“封闭形式”意指基于解析形式的解法，或者意指对于不高于四次的多项式不用迭代便可完全求解。可将封闭解的求解方法分为两类：**代数法**和**几何法**。有时它们的区别又并不明显：任何几何方法中都引入了代数描述，因此这两种方法是相似的。这两种方法的区别或许仅是求解过程的不同。

根据可解性的定义，最近在运动学方面的一个主要研究成果是，*所有包含转动关节和移动关节的串联型6自由度机构均是可解的*。但是这种解一般是数值解，对于6自由度机器人来说，只有在特殊情况下才有解析解。这种存在解析解（封闭解）的机器人具有如下特性：存在几个正交关节轴或者有多个α_i 为0或 ± 90°。一般计算数值解比计算解析解耗时，因此，在设计操作臂时重要的问题是使封闭解存在。在操作臂的设计者发现了这个问题不久，现在工业操作臂的虚拟设计已使这个问题大大简化，从而能够得到封闭解。

具有6个旋转关节的操作臂存在封闭解的充分条件是相邻的三个关节轴线相交于一点，在4.6节中对这个条件进行了讨论。当今设计的6自由度操作臂几乎都有三根相交轴。例如，PUMA560的4、5、6轴相交。 105~106

4.3 当n<6时操作臂子空间的描述

对于一个给定的操作臂来说，一系列可达目标坐标系构成了可达工作空间。对于一个n自由度操作臂（n<6），可达工作空间可看成是n自由度**子空间**的一部分。同样，一个6自由度操作臂的工作空间是一个空间的子集，更简单的操作臂的工作空间是这个子空间的子集。例如，图4-1中两连杆机器人的子空间是一个平面，其工作空间是该平面的一个子集，即当$l_1=l_2$时为一个半径为l_1+l_2的圆。

确定n自由度操作臂子空间的一种方法就是给出腕部坐标系或工具坐标系的表达式，它是含有n个变量的函数。如果将这n个变量看作自由变量，那么它们所有的可能取值就构成了这个子空间。

例4.1

试描述第3章中图3-6所示三连杆操作臂 ${}^B_WT$ 的子空间。

已知 ${}^B_WT$ 的子空间为:

$$
{}^{B}_{W}T = \begin{bmatrix} c_\phi & -s_\phi & 0.0 & x \\ s_\phi & c_\phi & 0.0 & y \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4-2}
$$

式中，x，y给出了腕关节的位置，ϕ给出了末端连杆的姿态。当x、y和ϕ可以取任意值时，就得到了子空间。任何不满足式（4-2）的腕部坐标系均在这个操作臂的子空间之外（从而位于这个工作空间之外）。连杆长度和关节运动范围限定了这个操作臂的工作空间为子空间的一个子集。

107 ■

例4.2

试描述图4-6所示两自由度极坐标操作臂 ${}^{0}_{2}T$ 的子空间。

已知

$$
{}^{0}P_{2ORG} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4-3}
$$

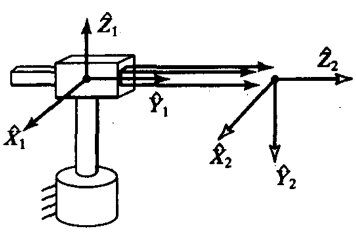


图4-6 两连杆极坐标操作臂

式中，x和y可以取任意值。它的方位则是确定的，因为 ${}^{0}\hat{Z}_2$ 轴的方向取决于x和y，所以它的姿态是受限制的，${}^{0}\hat{Y}_2$ 轴的方向总是向下，而 ${}^{0}\hat{X}_2$ 轴的方向可以通过计算叉乘 ${}^{0}\hat{Y}_2 \times {}^{0}\hat{Z}_2$ 求得。由x和y有

$$
{}^{0}\hat{Z}_2 = \begin{bmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4-4}
$$

因而，求得子空间为

$$
{}^{0}_{2}T = \begin{bmatrix} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & x \\ \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & y \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4-5}
$$

■

为了对具有n个自由度操作臂的目标点进行定义，通常采用n个参数来确定这个目标点。也就是说，如果给定的目标点有6个自由度，一般自由度$n<6$的操作臂是无法到达这个目标点的。在这种情况下，可寻找一个位于操作臂子空间内的可达目标点代替原目标点，并且和原期望目标点尽可能"靠近"。

因此，对于少于6个自由度的操作臂来说，当确定一般目标点时，求解方法如下:

1. 已知一般目标坐标系 ${}^S_GT$，计算一个修正的目标坐标系 ${}^S_{G'}T$，使得 ${}^S_{G'}T$ 位于操作臂的子空间内，并且和 ${}^S_GT$ 尽可能"靠近"。应预先选择一个"靠近"标准。

2. 将 ${}^S_{G'}T$ 作为期望目标，计算逆运动学，求关节角。注意，如果目标点不在操纵臂的工作空间内，将可能没有解。

首先确定工具坐标系原点到期望目标点的位置，然后选择一个接近期望姿态的可达姿态。正如我们在例4.1和4.2中所见的，子空间的计算取决于操纵臂的几何特征。对每个操纵臂必须单独考虑，从而得到相应的计算方法。 108

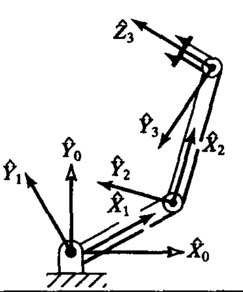
为了计算关节角使得操作臂能够到达距期望坐标系最近的可达坐标系，在4.7节中给出了将一个一般目标点投影到五自由度操作臂子空间的例子。

4.4 代数解法与几何解法

为了介绍运动学方程的求解方法，这里用两种不同方法对一个简单的平面三连杆操作臂进行求解。

代数解法

以第3章中所介绍的三连杆平面操作臂为例，它的连杆参数如图4-7所示。



i	α_i-1	α_i-1	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	0	L_1	0	θ_2
3	0	L_2	0	θ_3

图4-7 平面三连杆操作臂和它的连杆参数

按照第3章中所介绍的方法，应用这些连杆参数很容易求得这个机械臂的运动学方程：

109

$$ {}_W^BT={}_3^0T=\begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0.0 & l_1c_1+l_2c_{12} \\ s_{123} & c_{123} & 0.0 & l_1s_1+l_2s_{12} \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4-6} $$

为了集中讨论逆运动学问题，我们假设腕部坐标系相对于基坐标系的变换，即 ${}_W^BT$ 已经完成，因此目标点的位置已经确定。由于我们研究的是平面操作臂，因此通过确定三个量x，y和ϕ很容易确定这些目标点的位置，其中ϕ是连杆3在平面内的方位角（相对于 $+\hat{X}$ 轴）。因此，最好给出 ${}_W^BT$以确定目标点的位置，假定这个变换矩阵如下

$$ {}_W^BT=\begin{bmatrix} c_\phi & -s_\phi & 0.0 & x \\ s_\phi & c_\phi & 0.0 & y \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4-7} $$

所有可达目标点必须位于式（4-7）描述的子空间内。令式（4-6）和（4-7）相等，可以求得四个非线性方程，进而求出θ_1、θ_2和θ_3：

$$ c_\phi=c_{123} \tag{4-8} $$

$$ s_\phi=s_{123} \tag{4-9} $$

$$ x=l_1c_1+l_2c_{12} \tag{4-10} $$

$$ y=l_1s_1+l_2s_{12} \tag{4-11} $$

现在用代数方法求解方程（4-8）～（4-11）。将式（4-10）和（4-11）同时平方，然后相加，得到

$$ x^2+y^2=l_1^2+l_2^2+2l_1l_2c_2 \tag{4-12} $$

这里利用了

$$ \begin{aligned} c_{12}&=c_1c_2-s_1s_2 \\ s_{12}&=c_1s_2+s_1c_2 \end{aligned} \tag{4-13} $$

由式（4-12）求解c_2，得到：

$$ c_2=\frac{x^2+y^2-l_1^2-l_2^2}{2l_1l_2} \tag{4-14} $$

上式有解的条件是式（4-14）右边的值必须在－1和1之间。在这个解法中，这个约束条件可用来检查解是否存在。如果约束条件不满足，则操作臂与目标点的距离太远。

假定目标点在工作空间内，s_2的表达式为

$$ s_2=\pm\sqrt{1-c_2^2} \tag{4-15} $$

最后，应用2幅角反正切公式[⊖]计算θ_2，得

⊖ 见2.8节。

$$\theta_2 = \mathrm{A}\tan 2(s_2, c_2) \tag{4-16}$$ 110

式（4-15）是多解的，可选择“正”解或“负”解确定式（4-15）的符号。在确定θ_2时，再次应用求解运动学参数的方法，即常用的先确定期望关节角的正弦和余弦，然后应用2幅角反正切公式的方法。这样确保得出所有的解，且所求的角度是在适当的象限里。

求出了θ_2，可以根据式（4-10）和（4-11）求出θ_1。将式（4-10）和（4-11）写成如下形式

$$x = k_1 c_1 - k_2 s_1 \tag{4-17}$$

$$y = k_1 s_1 + k_2 c_1 \tag{4-18}$$

式中

$$\begin{aligned} k_1 &= l_1 + l_2 c_2 \\ k_2 &= l_2 s_2 \end{aligned} \tag{4-19}$$

为了求解这种形式的方程，可进行变量代换，实际上就是改变常数k_1和k_2的形式。

如果

$$r = +\sqrt{k_1^2 + k_2^2} \tag{4-20}$$

并且

$$\gamma = \mathrm{A}\tan 2(k_2, k_1)$$

则

$$\begin{aligned} k_1 &= r\cos\gamma \\ k_2 &= r\sin\gamma \end{aligned} \tag{4-21}$$

式（4-17）和（4-18）可以写成

$$\frac{x}{r} = \cos\gamma\cos\theta_1 - \sin\gamma\sin\theta_1 \tag{4-22}$$

$$\frac{y}{r} = \cos\gamma\sin\theta_1 + \sin\gamma\cos\theta_1 \tag{4-23}$$

因此

$$\cos(\gamma + \theta_1) = \frac{x}{r} \tag{4-24}$$

$$\sin(\gamma + \theta_1) = \frac{y}{r} \tag{4-25}$$

利用2幅角反正切公式，得

$$\gamma + \theta_1 = \mathrm{A}\tan 2\left(\frac{y}{r}, \frac{x}{r}\right) = \mathrm{A}\tan 2(y, x) \tag{4-26}$$

从而

$$\theta_1 = \mathrm{A}\tan 2(y, x) - \mathrm{A}\tan 2(k_2, k_1) \tag{4-27}$$ 111

注意，θ_2符号的选取将导致k_2符号的变化，因此影响到θ_1。应用式（4-20）和（4-21）进行变换求解的方法经常出现在求解运动学问题中，即式（4-10）或（4-11）的求解方法。同时

注意，如果$x=y=0$，则式（4-27）不确定，此时θ_1可取任意值。

最后，由式（4-8）和（4-9）能够求出θ_1，θ_2，θ_3的和:

$$\theta_1+\theta_2+\theta_3=\mathrm{A}\tan 2(s_\phi,c_\phi)=\phi \tag{4-28}$$

由于θ_1和θ_2已知，从而可以解出θ_3。这种两个或两个以上连杆在平面内运动的操作臂是比较典型的问题。在求解过程中给出了关节角和的表达式。

总之，用代数方法求解运动学方程是求解操作臂的基本方法之一，在求解方程时，解的形式已经确定。可以看出，对于许多常见的几何问题，经常会出现几种形式的超越方程。在前面的章节中已经遇到了其中的两种形式。更详细的内容在附录C中列出。

几何解

在几何方法中，为求出操作臂的解，须将操作臂的空间几何参数分解成为平面几何参数。用这种方法在求解许多操作臂时（特别是当$\alpha_i=0$或$\pm 90°$时）是相当容易的。然后应用平面几何方法可以求出关节角度[7]。对于如图4-7所示的具有3个自由度的操作臂来说，由于操作臂是平面的，因此我们可以利用平面几何关系直接求解。

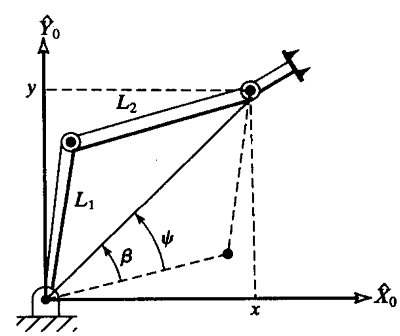


图4-8 平面三连杆机器人的平面几何关系

图4-8中示出了由l_1和l_2所组成的三角形及连接坐标系{0}的原点和坐标系{3}的原点的连线。图中虚线表示该三角形的另一种可能情况，同样能够达到坐标系{3}的位置。对于实线表示的三角形，利用余弦定理求解θ_2

112 $$x^2+y^2=l_1^2+l_2^2-2l_1l_2\cos(180+\theta_2) \tag{4-29}$$

现在，$\cos(180+\theta_2)=-\cos(\theta_2)$，所以有

$$c_2=\frac{x^2+y^2-l_1^2-l_2^2}{2l_1l_2} \tag{4-30}$$

为使该三角形成立，到目标点的距离$\sqrt{x^2+y^2}$必须小于或等于两个连杆的长度之和l_1+l_2。可对上述条件进行计算校核证明该解是否存在。当目标点超出操作臂的运动范围时，这个条件不能满足。假设解存在，那么由该方程所解得的θ_2应在0～－180°范围内，因为只有这些值能够使图4-8中的三角形成立。另一个可能的解（由虚线所示的三角形）可以通过对称关系$\theta_2'=-\theta_2$得到。

为求解θ_1，需要建立图4-8所示的ψ和β角的表达式。首先，β可以位于任意象限，这是由x和y的符号决定的。为此，应用2幅角反正切公式:

$$\beta=\mathrm{A}\tan 2(y,x) \tag{4-31}$$

再利用余弦定理解出ψ:

$$\cos\psi=\frac{x^2+y^2+l_1^2-l_2^2}{2l_1\sqrt{x^2+y^2}} \tag{4-32}$$

这里，求反余弦，使$0 \leqslant \psi \leqslant 180°$，以便使式（4-32）的几何关系成立。利用几何法求解时，上述关系是经常要用到的，因此必须在变量的有效范围内应用这些公式才能保证几何关系成立。那么有

$$\theta_1 = \beta \pm \psi \tag{4-33}$$

式中，当$\theta_2<0$时，θ_1取“＋”号；当$\theta_2>0$时，θ_1取“－”号。

平面内的角度是可以相加的，因此三个连杆的角度之和即为最后一个连杆的姿态:

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \phi \tag{4-34}$$

由上式求出θ_3便得到这个操作臂的全部解。

4.5 通过化简为多项式的代数解法

超越方程往往很难求解，即使只有一个变量（如θ），因为它一般常以$\sin\theta$和$\cos\theta$的形式出现。可进行下列变换，用单一变量u来表示:

$$\begin{aligned} u &= \tan\frac{\theta}{2} \\ \cos\theta &= \frac{1-u^2}{1+u^2} \\ \sin\theta &= \frac{2u}{1+u^2} \end{aligned} \tag{4-35}$$

113

这是在求解运动学方程中经常用到的一种很重要的几何变换方法。这个变换是把超越方程变换成关于u的多项式方程。附录A中列出了这些变换关系和一些三角恒等式。

例4.3

将超越方程

$$a\cos\theta + b\sin\theta = c \tag{4-36}$$

变换成含有半角正切的一次多项式，以求解θ。

采用式（4-35）的变换式，将上式乘以$1+u^2$，得

$$a(1-u^2)+2bu=c(1+u^2) \tag{4-37}$$

取u的幂函数形式为

$$(a+c)u^2-2bu+(c-a)=0 \tag{4-38}$$

由一元二次方程求解公式解出:

$$u=\frac{b\pm\sqrt{b^2+a^2-c^2}}{a+c} \tag{4-39}$$

因此，

$$\theta = 2\tan^{-1}\left(\frac{b\pm\sqrt{b^2+a^2-c^2}}{a+c}\right) \tag{4-40}$$

■

由于原来的超越方程可能不存在实根，因此从式（4-39）中解出u是很复杂的。注意，如

果$a+c=0$，那么自变量的反正切为无穷大，因此$\theta=180°$。如果用计算机来计算，应该预先检查分母是否为0。当式（4-38）中的二次项被消去后，那么这个二次方程就简化为线性方程了。

四次多项式便具有封闭形式的解[8, 9]，所以用4阶（或低于4阶）的代数方程求解操作臂是相当简单的，这种操作臂被称为**封闭解操作臂**。

4.6 三轴相交的PIEPER解法

如前所述，尽管一般具有6个自由度的机器人没有封闭解，但在某些特殊情况下还是可解的。Pieper[3,4]研究了3个相邻的轴相交于一点的6自由度操作臂⊖。在本节中，我们将介绍Pieper提出的方法，这种方法是针对6个关节均为旋转关节、且后面3个轴相交的操作臂。该方
114 法可应用于其他形式的操作臂，包括移动关节，感兴趣的读者可参看文献[4]。Pieper的研究成果主要应用于产品化的工业机器人中。

当最后3根轴相交时，连杆坐标系{4}，{5}和{6}原点均位于这个交点上。这点的基坐标如下

$$^{0}P_{4ORG}={}^{0}_{1}T\,{}^{1}_{2}T\,{}^{2}_{3}T\,{}^{3}P_{4ORG}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\\1\end{bmatrix} \tag{4-41}$$

即，对于$i=4$，由式（3-6）的第4列有

$$^{0}P_{4ORG}={}^{0}_{1}T\,{}^{1}_{2}T\,{}^{2}_{3}T\begin{bmatrix}a_3\\-d_4 s\alpha_3\\d_4 c\alpha_3\\1\end{bmatrix} \tag{4-42}$$

或

$$^{0}P_{4ORG}={}^{0}_{1}T\,{}^{1}_{2}T\begin{bmatrix}f_1(\theta_3)\\f_2(\theta_3)\\f_3(\theta_3)\\1\end{bmatrix} \tag{4-43}$$

式中，

$$\begin{bmatrix}f_1\\f_2\\f_3\\1\end{bmatrix}={}^{2}_{3}T\begin{bmatrix}a_3\\-d_4 s\alpha_3\\d_4 c\alpha_3\\1\end{bmatrix} \tag{4-44}$$

在式（4-44）中，对于${}^{2}_{3}T$应用式（3-6）得出下列f_i的表达式:

$$\begin{aligned}f_1&=a_3c_3+d_4s\alpha_3s_3+a_2\\f_2&=a_3c\alpha_2s_3-d_4s\alpha_3c\alpha_2c_3-d_4s\alpha_2c\alpha_3-d_3s\alpha_2\\f_3&=a_3s\alpha_2s_3-d_4s\alpha_3s\alpha_2c_3+d_4c\alpha_2c\alpha_3+d_3c\alpha_2\end{aligned} \tag{4-45}$$

⊖ 包括具有3个相邻的平行轴的操作臂，可以认为它们的交点在无穷远处。

在式（4-43）中，对于 ${}^0_1T$ 和 ${}^1_2T$ 应用式（3-6）得

$$ {}^0P_{4ORG}=\begin{bmatrix} c_1g_1-s_1g_2 \\ s_1g_1+c_1g_2 \\ g_3 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4-46} $$

式中，

$$ \begin{aligned} g_1 &= c_2f_1-s_2f_2+a_1 \\ g_2 &= s_2c\alpha_1f_1+c_2c\alpha_1f_2-s\alpha_1f_3-d_2s\alpha_1 \\ g_3 &= s_2s\alpha_1f_1+c_2s\alpha_1f_2+c\alpha_1f_3+d_2c\alpha_1 \end{aligned} \tag{4-47} $$

现在写出 ${}^0P_{4ORG}$ 平方的表达式，这里$r=x^2+y^2+z^2$，从式（4-46）可以看出

$$ r=g_1^2+g_2^2+g_3^2 \tag{4-48} $$ 115

所以，对于g_i，由式（4-47）得

$$ r=f_1^2+f_2^2+f_3^2+a_1^2+d_2^2+2d_2f_3+2a_1(c_2f_1-s_2f_2) \tag{4-49} $$

现在，由式（4-46）写出Z方向分量的方程，那么表示这个系统的两个方程如下：

$$ \begin{aligned} r &= (k_1c_2+k_2s_2)2a_1+k_3 \\ z &= (k_1s_2-k_2c_2)s\alpha_1+k_4 \end{aligned} \tag{4-50} $$

式中

$$ \begin{aligned} k_1 &= f_1 \\ k_2 &= -f_2 \\ k_3 &= f_1^2+f_2^2+f_3^2+a_1^2+d_2^2+2d_2f_3 \\ k_4 &= f_3c\alpha_1+d_2c\alpha_1 \end{aligned} \tag{4-51} $$

方程式（4-50）很有用，因为它消去了因变量θ_1，并且简化了因变量θ_2的形式。

现在讨论如何由式（4-50）求解θ_3，分三种情况：

1. 若$a_1=0$，则$r=k_3$，这里r是已知的。k_3的右边仅是关于θ_3的函数。代入式（4-35）后，由包含 $\tan\dfrac{\theta_3}{2}$ 的一元二次方程可以解出θ_3。

2. 若$s\alpha_1=0$，则$z=k_4$，这里z是已知的。再次代入式（4-35）后，利用上面的一元二次方程可以解出θ_3。

3. 否则，从方程（4-50）中消去s_2和c_2，得到

$$ \frac{(r-k_3)^2}{4a_1^2}+\frac{(z-k_4)^2}{s^2\alpha_1}=k_1^2+k_2^2 \tag{4-52} $$

代入式（4-35）解出θ_3后，可得到一个四次方程，由此可解出θ_3。[⊖]

解出θ_3后，就可以根据式（4-50）解出θ_2，再根据式（4-46）解出θ_1。

⊖ 这里给出 $f_1^2+f_2^2+f_3^2=a_3^2+d_4^2+d_3^2+a_2^2+2d_4d_3c\alpha_3+2a_2a_3c_3+2a_2d_4s\alpha_3s_3$ 。

为了完成求解工作，还需要求出θ_4、θ_5、θ_6。由于这些轴相交，故这些关节角只影响最后连杆的方位，我们只需计算指定目标的方向 ${}^0_6R$ 。在求出θ_1、θ_2、θ_3后，当θ_4=0时，可以由连杆坐标系｛4｝相对于基坐标系的方位计算出 ${}^0_4R\big|_{\theta_4=0}$。坐标系{6}的期望方位与连杆坐标系｛4｝的方位的差别仅在于最后三个关节的作用。由于 ${}^0_6R$ 已知，因此这个问题可以通过如下计算得出结果

116

$$ {}^4_6R\big|_{\theta_4=0} = {}^0_4R^{-1}\big|_{\theta_4=0}\,{}^0_6R \tag{4-53} $$

对于大多数操作臂来说，完全可以将第2章介绍的Z-Y-Z欧拉角解法应用于 ${}^4_6R\big|_{\theta_4=0}$ ，解出最后三个关节角。对于任何一个4、5、6轴相交的操作臂来说，最后三个关节角能够通过一组合适的欧拉角求出。最后的三个关节通常有两种解，因此这种操作臂解的总数就是前三个关节解的数量的2倍。

4.7 操作臂逆运动学实例

在本节中，将研究两个工业机器人的逆运动学问题。一种是仅用代数方法求操作臂的解，第二种是用部分代数方法和部分几何方法求操作臂的解。下面的解法并不是适用于解决所有机器人运动学问题，但是对于大多数通用操作臂来说，这些解法是最常用的。注意，前面提到的Pieper的解法（在前一节中）能够适用于这些操作臂，但在这里我们选择一种不同的方法来求解，以便对各种有效解法有所了解。

The Unimation PUMA 560机器人

作为一个适用于6自由度操作臂的代数解法的例子，我们对第3章中提出的PUMA 560的运动学方程进行求解。这种解法类似于文献[5]。

当 ${}^0_6T$ 中的数值已知时，我们希望通过下列方程

$$ \begin{aligned} {}^0_6T &= \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= {}^0_1T(\theta_1)\,{}^1_2T(\theta_2)\,{}^2_3T(\theta_3)\,{}^3_4T(\theta_4)\,{}^4_5T(\theta_5)\,{}^5_6T(\theta_6) \end{aligned} \tag{4-54} $$

解出θ_i。

整理式（4-54），将含有θ_1的部分移到方程的左边

$$ [{}^0_1T(\theta_1)]^{-1}\,{}^0_6T = {}^1_2T(\theta_2)\,{}^2_3T(\theta_3)\,{}^3_4T(\theta_4)\,{}^4_5T(\theta_5)\,{}^5_6T(\theta_6) \tag{4-55} $$

将 ${}^0_1T$ 转置，将（4-55）写成

$$ \begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^1_6T \tag{4-56} $$

式中 ${}_6^1T$ 由第3章的式（3-13）给出。这种在方程两边乘以同一逆变换的技巧经常有助于分离变量求解。

令方程（4-56）两边的元素（2,4）相等，得到

$$-s_1p_x+c_1p_y=d_3 \tag{4-57}$$ 117

为求解这种形式的方程，可进行三角恒等变换

$$\begin{aligned}p_x&=\rho\cos\phi\\ p_y&=\rho\sin\phi\end{aligned} \tag{4-58}$$

式中

$$\begin{aligned}\rho&=\sqrt{p_x^2+p_y^2}\\ \phi&=\mathrm{A}\tan2(p_y,p_x)\end{aligned} \tag{4-59}$$

将式（4-58）带入式（4-57），得

$$c_1s_\phi-s_1c_\phi=\frac{d_3}{\rho} \tag{4-60}$$

由差角公式得

$$\sin(\phi-\theta_1)=\frac{d_3}{\rho} \tag{4-61}$$

因此

$$\cos(\phi-\theta_1)=\pm\sqrt{1-\frac{d_3^2}{\rho^2}} \tag{4-62}$$

则

$$\phi-\theta_1=\mathrm{A}\tan2\left(\frac{d_3}{\rho},\pm\sqrt{1-\frac{d_3^2}{\rho^2}}\right) \tag{4-63}$$

最后，θ_1 的解可以写为

$$\theta_1=\mathrm{A}\tan2(p_y,p_x)-\mathrm{A}\tan2(d_3,\pm\sqrt{p_x^2+p_y^2-d_3^2}) \tag{4-64}$$

注意到相应于式（4-64）的正负号，θ_1 可以有两种解。现在，θ_1 已知，则式（4-56）的左边为已知。如果令式（4-56）两边的元素（1,4）和元素（3,4）分别相等，得

$$\begin{aligned}c_1p_x+s_1p_y&=a_3c_{23}-d_4s_{23}+a_2c_2\\ -p_x&=a_3s_{23}+d_4c_{23}+a_2s_2\end{aligned} \tag{4-65}$$

如果将式（4-65）和式（4-57）平方后相加，得

$$a_3c_3-d_4s_3=K \tag{4-66}$$

式中

$$K=\frac{p_x^2+p_y^2+p_x^2-a_2^2-a_3^2-d_3^2-d_4^2}{2a_2} \tag{4-67}$$ 118

注意，从式（4-66）中已经消去与θ_1有关的项，于是式（4-66）和式（4-57）的形式相同，因此采用同样的三角恒等变换可以得出θ_3的解:

$$\theta_3 = \mathrm{A}\tan 2(a_3, d_4) - \mathrm{A}\tan 2(K, \pm\sqrt{a_3^2 + d_4^2 - K^2}) \tag{4-68}$$

式（4-68）中的“±”号使得θ_3有两个不同的解。如果重新整理式（4-54），使公式左边只有θ_2和已知的函数

$$[{}^0_3T(\theta_2)]^{-1}\,{}^0_6T = {}^3_4T(\theta_4)\,{}^4_5T(\theta_5)\,{}^5_6T(\theta_6) \tag{4-69}$$

即

$$\begin{bmatrix} c_1c_{23} & s_1c_{23} & -s_{23} & -a_2c_3 \\ -c_1s_{23} & -s_1s_{23} & -c_{23} & a_2s_3 \\ -s_1 & c_1 & 0 & -d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^3_6T \tag{4-70}$$

式中，${}^3_6T$ 由第3章的式（3-11）确定。令式（4-70）两边的元素（1,4）和元素（2,4）相等，得到

$$\begin{aligned} c_1c_{23}p_x + s_1c_{23}p_y - s_{23}p_z - a_2c_3 &= a_3 \\ -c_1s_{23}p_x - s_1s_{23}p_y - c_{23}p_z + a_2s_3 &= d_4 \end{aligned} \tag{4-71}$$

联立上述两个方程可以解出s_{23}和c_{23}，结果为

$$\begin{aligned} s_{23} &= \frac{(-a_3 - a_2c_3)p_z + (c_1p_x + s_1p_y)(a_2s_3 - d_4)}{p_z^2 + (c_1p_x + s_1p_y)^2} \\ c_{23} &= \frac{(a_2s_3 - d_4)p_z - (a_3 + a_2c_3)(c_1p_x + s_1p_y)}{p_z^2 + (c_1p_x + s_1p_y)^2} \end{aligned} \tag{4-72}$$

上式中分母相等，且为正数，所以可求得θ_2和θ_3的和为

$$\begin{aligned} \theta_{23} = \mathrm{A}\tan 2[&(-a_3 - a_2c_3)p_z - (c_1p_x + s_1p_y)(d_4 - a_2s_3) \\ &(a_2s_3 - d_4)p_z - (a_3 + a_2c_3)(c_1p_x + s_1p_y)] \end{aligned} \tag{4-73}$$

根据θ_1和θ_3解的四种可能组合，由式（4-73）计算θ_{23}的4个值。然后，计算θ_2的4个可能的解为

$$\theta_2 = \theta_{23} - \theta_3 \tag{4-74}$$

式中应针对不同的情况适当选取θ_3。

现在，式（4-70）中左边完全已知，令式（4-70）两边的元素（1,3）和元素（3,3）分别相等，得

$$\begin{aligned} r_{13}c_1c_{23} + r_{23}s_1c_{23} - r_{33}s_{23} &= -c_4s_5 \\ -r_{13}s_1 + r_{23}c_1 &= s_4s_5 \end{aligned} \tag{4-75}$$

只要$s_5 \neq 0$，就可解出θ_4

119

$$\theta_4 = \mathrm{A}\tan 2(-r_{13}s_1 + r_{23}c_1, -r_{13}c_1c_{23} - r_{23}s_1c_{23} + r_{33}s_{23}) \tag{4-76}$$

当θ_5=0时，操作臂处于奇异位形，此时关节轴4和关节轴6成一条直线，机器人末端连杆的运动只有一种。在这种情况下，所有结果（所有可能的解）都是θ_4和θ_6的和或差。这种情况可以

通过检查式（4-76）中Atan2的两个变量是否都趋近于零来判断。如果都趋近于零，则θ_4可以任意选取[⊖]，之后计算θ_6时，可以参照θ_4进行选取。

改写式（4-54），使公式左边均为已知的函数和θ_4，即

$$[{}^0_4T(\theta_4)]^{-1}\,{}^0_6T={}^4_5T(\theta_5)\,{}^5_6T(\theta_6) \tag{4-77}$$

式中，$[{}^0_4T(\theta_4)]^{-1}$由下式给出

$$\begin{bmatrix} c_1c_{23}c_4+s_1s_4 & s_1c_{23}c_4-c_1s_4 & -s_{23}c_4 & -a_2c_3c_4+d_3s_4-a_3c_4 \\ -c_1c_{23}s_4+s_1c_4 & -s_1c_{23}s_4-c_1c_4 & s_{23}s_4 & a_2c_3s_4+d_3c_4+a_3s_4 \\ -c_1s_{23} & -s_1s_{23} & -c_{23} & a_2s_3-d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4-78}$$

并且${}^4_6T$由第3章中的式（3-10）给出。令式（4-77）两边的元素（1,3）和元素（3,3）分别相等，得

$$\begin{aligned} r_{13}(c_1c_{23}c_4+s_1s_4)+r_{23}(s_1c_{23}c_4-c_1s_4)-r_{33}(s_{23}c_4)&=-s_5 \\ r_{13}(-c_1s_{23})+r_{23}(-s_1s_{23})+r_{33}(-c_{23})&=c_5 \end{aligned} \tag{4-79}$$

由此可以求出θ_5

$$\theta_5=\mathrm{A}\tan 2(s_5,c_5) \tag{4-80}$$

式中，s_5和c_5由式（4-79）给出。

再次应用上述方法，可以计算出$({}^0_5T)^{-1}$，并将式（4-54）写为如下形式

$$({}^0_5T)^{-1}\,{}^0_6T={}^5_6T(\theta_6) \tag{4-81}$$

如前所述，令式（4-77）两边的元素（1,1）和元素（3,1）分别相等，得

$$\theta_6=\mathrm{A}\tan 2(s_6,c_6) \tag{4-82}$$

式中

$$\begin{aligned} s_6&=-r_{11}(c_1c_{23}s_4-s_1c_4)-r_{21}(s_1c_{23}s_4+c_1c_4)+r_{31}(s_{23}s_4) \\ c_6&=r_{11}[(c_1c_{23}c_4+s_1s_4)c_5-c_1s_{23}s_5]+r_{21}[(s_1c_{23}c_4-c_1s_4)c_5-s_1s_{23}s_5] \\ &\quad -r_{31}(s_{23}c_4c_5+c_{23}s_5) \end{aligned}$$

由于在式（4-64）和（4-68）中出现了±号，因此这些方程可能有4种解。另外，由于操作臂腕关节“翻转”可得到另外4个解。对于以上计算出的4种解，由腕关节的“翻转”可得到 120

$$\begin{aligned} \theta_4'&=\theta_4+180^\circ \\ \theta_5'&=-\theta_5 \\ \theta_6'&=\theta_6+180^\circ \end{aligned} \tag{4-83}$$

当计算出所有8种答案以后，由于关节运动范围的限制要将其中的一些解（甚至全部）舍去。在余下的有效解中，通常选取一个最接近于当前操作臂的解。

⊖ 通常取关节4的当前值。

Yasukawa Motoman L-3型机器人

由第3章中第二个例子，这里将要求解Yasukawa Motoman L-3型机器人的运动学方程。这个解将由部分代数解以及部分几何解组成。Motoman L-3有三个特征使它的逆运动学特性不同于PUMA机器人。第一，由于这种操作臂只有五个关节，因此它的末端执行器的位姿不能保证到达一般目标坐标系。第二，这种四杆机构以及链传动方式使得一个驱动器需要同时驱动两个甚至更多个关节。第三，驱动器的运动范围不是常数，而是取决于其他驱动器的位置，因此判断一组驱动器运动是否在某一范围内是没有意义的。

如果考虑Motoman操作臂子空间的特性（同样适用于许多具有5个自由度的操作臂），可以很快看到这个子空间可以通过一个可达方位的约束来描述。工具端的指向（$\hat{Z}_T$ 轴）必须位于"操作臂的平面内"，该面是一个包含关节1的轴线以及轴4和轴5交点的垂直面。以最小旋转量改变工具端的指向从而获得离一般方位最近的方位，该方位位于上述平面内。不需要给出这个子空间的显函数方程，而只需要建立一种将一般目标坐标系投影到这个子空间的方法。注意，对于这种情况的讨论仅是由于腕部坐标系和工具坐标系沿 $\hat{Z}_w$ 的平移不同。

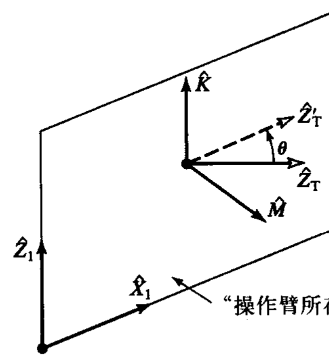


图4-9 将目标坐标系旋转到Motoman操作臂的子空间

图4-9中所示为操作臂平面的法向 $\hat{M}$ 以及工具端的期望指向 $\hat{Z}_T$ 。为了在这个平面内产生一个新的指向 $\hat{Z}_T$，该指向必须绕某一矢量 $\hat{K}$ 旋转θ角。显然，使θ最小的 $\hat{K}$ 位于这个平面内，同时与 $\hat{Z}_T$ 和 $\hat{Z}'_T$ 正交。

对于任何给定的目标坐标系，$\hat{M}$ 的定义如下

$$\hat{M}=\frac{1}{\sqrt{p_x^2+p_y^2}}\begin{bmatrix}-p_y\\ p_x\\ 0\end{bmatrix} \tag{4-84}$$

式中，p_x 和p_y 是期望工具端位置的x和y坐标，则K由下式给出

121

$$K=\hat{M}\times\hat{Z}_T \tag{4-85}$$

新的 $\hat{Z}'_T$ 为

$$\hat{Z}'_T=\hat{K}\times\hat{M} \tag{4-86}$$

θ的旋转量为

$$\begin{aligned}\cos\theta&=\hat{Z}_T\cdot\hat{Z}'_T\\ \sin\theta&=(\hat{Z}_T\times\hat{Z}'_T)\cdot\hat{K}\end{aligned} \tag{4-87}$$

应用Rodrique公式（参见习题2.20），有

$$\hat{Y}'_T=c\theta\hat{Y}_T+s\theta(\hat{K}\times\hat{Y}_T)+(1-c\theta)(\hat{K}\cdot\hat{Y}_T)\hat{K} \tag{4-88}$$

最后可以计算出工具端新的旋转矩阵中其余的未知列

$$\hat{X}'_T = \hat{Y}'_T \times \hat{Z}'_T \tag{4-89}$$

式（4-84）~（4-89）描述了一种将已知的一般目标方位投影到Motoman机器人子空间的方法。

假定已知腕部坐标系 ${}^B_WT$ 在操作臂的子空间内，我们按照下述方法求解运动学方程。在求解Motoman L-3运动学方程时，可以构造连杆变换矩阵的乘积：

$${}^0_5T={}^0_1T\,{}^1_2T\,{}^2_3T\,{}^3_4T\,{}^4_5T \tag{4-90}$$

如果令

$${}^0_5T=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4-91}$$

式（4-90）两边同时前乘 ${}^0_1T^{-1}$，得到

$${}^0_1T^{-1}\,{}^0_5T={}^1_2T\,{}^2_3T\,{}^3_4T\,{}^4_5T \tag{4-92}$$ 122

式中左边为

$$\begin{bmatrix} c_1r_{11}+s_1r_{21} & c_1r_{12}+s_1r_{22} & c_1r_{13}+s_1r_{23} & c_1p_x+s_1p_y \\ -r_{31} & -r_{32} & -r_{33} & -p_z \\ -s_1r_{11}+c_1r_{21} & -s_1r_{12}+c_1r_{22} & -s_1r_{13}+c_1r_{23} & -s_1p_x+c_1p_y \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4-93}$$

右边为

$$\begin{bmatrix} * & * & s_{234} & * \\ * & * & -c_{234} & * \\ s_5 & c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4-94}$$

式（4-94）中一些元素并没有给出。令方程两边的元素（3, 4）相等，得

$$-s_1p_x+c_1p_y=0 \tag{4-95}$$

由此求得[⊖]

$$\theta_1=\mathrm{A}\tan 2(p_y, p_x) \tag{4-96}$$

令元素（3,1）和（3,2）相等，得

$$\begin{aligned} s_5 &= -s_1r_{11}+c_1r_{21} \\ c_5 &= -s_1r_{12}+c_1r_{22} \end{aligned} \tag{4-97}$$

由上式计算θ_5得

⊖ 对于这种操作臂，第二个解受到关节运动范围的限制，因此可不必计算。

$$\theta_5 = \mathrm{A}\tan 2(r_{21}c_1 - r_{11}s_1, r_{22}c_1 - r_{12}s_1) \tag{4-98}$$

令元素（2,3）和（1,3）相等，得

$$\begin{aligned} c_{234} &= r_{33} \\ s_{234} &= c_1 r_{13} + s_1 r_{23} \end{aligned} \tag{4-99}$$

由此得

$$\theta_{234} = \mathrm{A}\tan 2(r_{13}c_1 + r_{23}s_1, r_{33}) \tag{4-100}$$

为了分别解出θ_2，θ_3和θ_4，可应用几何方法。图4-10所示为操作臂平面内关节轴2处的点A、关节轴3处的点B和关节轴4处的点C。

对于三角形ABC应用余弦定理，有

$$\cos\theta_3 = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - l_2^2 - l_3^2}{2l_2 l_3} \tag{4-101}$$

则有[⊖]

123

$$\theta_3 = \mathrm{A}\tan 2\left(\sqrt{1-\cos^2\theta_3}, \cos\theta_3\right) \tag{4-102}$$

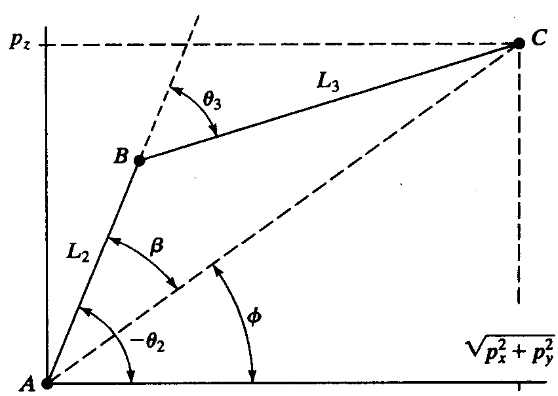


图4-10 平面内的Motoman操作臂

从图4-10可以看出$\theta_2 = -\phi - \beta$，即

$$\theta_2 = -\mathrm{A}\tan 2\left(p_z, \sqrt{p_x^2 + p_y^2}\right) - \mathrm{A}\tan 2(l_3\sin\theta_3, l_2 + l_3\cos\theta_3) \tag{4-103}$$

最终得到

$$\theta_4 = \theta_{234} - \theta_2 - \theta_3 \tag{4-104}$$

关节角度已经求出，还须进一步计算求出驱动器参数。参见3.7节，通过求解式（3-16）得出驱动器参数A_i:

⊖ 对于这种操作臂，第二个解受到关节运动范围的限制，因此可不必计算。

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \frac{1}{k_1}(\theta_1 - \lambda_1) \\
A_2 &= \frac{1}{k_2}\left(\sqrt{-2\alpha_2\beta_2\cos\left(\theta_2 - \Omega_2 - \tan^{-1}\left(\frac{\phi_2}{\gamma_2}\right) + 270^\circ\right) + \alpha_2^2 + \beta_2^2} - \lambda_2\right) \\
A_3 &= \frac{1}{k_3}\left(\sqrt{-2\alpha_3\beta_3\cos\left(\theta_2 + \theta_3 - \tan^{-1}\left(\frac{\phi_3}{\gamma_3}\right) + 90^\circ\right) + \alpha_3^2 + \beta_3^2} - \lambda_3\right) \\
A_4 &= \frac{1}{k_4}(180^\circ + \lambda_4 - \theta_2 - \theta_3 - \theta_4) \\
A_5 &= \frac{1}{k_5}(\lambda_5 - \theta_5)
\end{aligned}
\tag{4-105}
$$

因为驱动器运动范围已被限定，因此必须检查计算出的结果是否在这个范围之内。事实上，“这个范围”的检查是复杂的。由于机构布局使得驱动器之间相互作用，彼此的运动范围相互影响。对于Motoman机器人，驱动器2和3相互作用而且始终要满足下列关系：

$$A_2 - 10\,000 > A_3 > A_2 + 3000 \tag{4-106}$$ 124

即驱动器3的运动范围是驱动器2位置的函数，同样，

$$32\,000 - A_4 < A_5 < 55\,000 \tag{4-107}$$

现在，关节5转1圈相当于驱动器码盘的25 600个计数脉冲，因此当A_4>2600时，A_5有两个可能的解。这是Yasukawa Motoman L-3机器人唯一可能产生大于一个解的情况。

4.8 标准坐标系

求解关节角度的能力实际上是许多机器人控制系统的核心问题。再次参考图4-11所示的标准坐标系的范例。

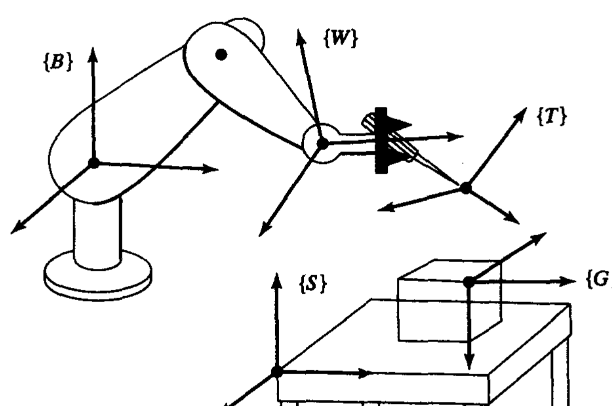


图4-11 “标准”坐标系的位置

在一般的机器人系统中，我们按照如下方法应用这些坐标系：

1. 由用户确定系统中工作台坐标系的位置，这个坐标系可能在工作台的角点上，如图

4-12所示，或者附于一个移动的传送带上。工作台坐标系{S}是相对于基坐标系{B}定义的。

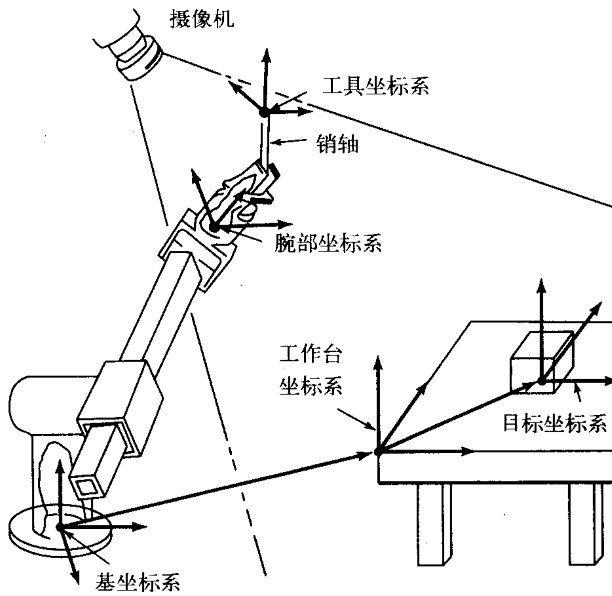


图4-12 工作台示例

2. 用户通过规定坐标系{T}给出机器人所用工具的描述。对于每种末端执行器，机器人抓持的每一种工具都应当有一个相应的工具坐标系{T}。注意，以不同的方式抓持相同的工具，工具坐标系{T}的定义是不同的。工具坐标系{T}是相对于腕部坐标系{W}定义的，即 ${}^{W}_{T}T$ 。

3. 用户通过给定目标坐标系{G}相对于工作台坐标系的描述来指定机器人运动的目标点。对于机器人的某些运动，{T}和{S}的定义经常保持不变。在这种情况下，一旦它们被定义，用户仅需给出一系列{G}的规定。在许多系统中，工具坐标系的定义 (${}^{W}_{T}T$)是一个常量（比如，由两指端中心的原点来定义）。工作台坐标系可以被固定，也可以由用户通过机器人简单示教。在这些系统中，并不需要用户搞清楚这五种标准坐标系——他（她）只需要相对于由工作台坐标系确定的工作区域，移动工具到指定的位置（目标）。

4. 机器人系统需要计算一系列关节角度使关节依次运动，工具坐标系从初始位置以连续方式运动，直到{T}={G}时运动结束。

4.9 操作臂求解

SOLVE函数可进行笛卡儿变换，称为逆运动学函数。这个逆运动学是广义的，使得工具坐标系和工作台坐标系的定义可以应用于基本逆运动学，从而可以求解相对于基坐标系的腕部坐标系。

给定的目标坐标系 ${}^{S}_{T}T$ ，SOLVE应用工具坐标系和工作台坐标系的定义来计算{W}相对于{B}的位置 ${}^{B}_{W}T$：

$$ {}^{B}_{W}T = {}^{B}_{S}T\,{}^{S}_{T}T\,{}^{W}_{T}T^{-1} \tag{4-108} $$

125～126 然后，逆运动学将 ${}^{B}_{W}T$ 作为输入，计算θ_1到θ_n。

4.10 重复精度和定位精度

现今许多工业机器人能够运动到示教的目标点。**示教点**是操作臂运动实际达到的点，然后关节位置传感器读取关节角并存储。当命令机器人返回这个空间点时，每个关节都移动到已存储的关节角的位置。在这样简单的“示教和再现”的操作臂中，不存在逆运动学问题，因为没有在笛卡儿坐标系里指定目标点。当制造商在确定操作臂返回示教点的精度时，就是在确定操作臂的**重复精度**。

一个目标的位姿一般都是通过笛卡儿坐标确定的，计算逆运动学问题是为了求出关节角。对于可将目标位置描述为笛卡儿坐标的系统，它可以将操作臂移动到工作空间中一个从未示教过的点，这些点或许以前从未达到过，我们称这些点为**计算点**。对许多操作臂作业来说这种能力是必须的。比如，如果用计算机视觉系统确定机器人必须抓持的某一部分，那么机器人必须能够移动到视觉传感器指定的笛卡儿坐标。到达这个计算点的精度就被称作为操作臂的**定位精度**。

操作臂的定位精度受到重复精度的影响。显然，定位精度受到机器人运动学方程中参数精度的影响。Denavit-Hartenberg参数中的误差将会引起逆运动学方程中关节角的计算误差。因此，尽管绝大多数工业机器人的重复精度非常好，但是操作臂之间的定位精度通常相当差，并且变化相当大。标定技术能够通过对操作臂运动学参数的估计提高操作臂的定位精度[10]。

4.11 计算问题

在许多路径控制方法中（这将在第7章中进行讨论），需要以相当高的速率计算操作臂的逆运动学问题，比如30Hz，甚至更快。因此，计算效率是一个重要问题。对于计算速度的要求不包括数值解法的影响（实际上是迭代算法），因此，在此对这个问题不做讨论。

3.10节的主要内容是讨论正运动学问题，但也适用于逆运动学问题。对于逆运动学问题，一个关于Atan2的查表法子程序经常被用于获得更高的速度。

多解的计算结构也十分重要。并行计算所有的解通常效率是相当高的，而不是依次顺序计算。当然在某些应用中，并不需要所有的结果，因此只计算需要的结果可以节省实际的计算时间。

当用几何方法求逆运动学解时，有时可以通过一些简单运算，计算各种角度以求得第一个解，从而对多解问题进行计算，即第一个解的计算是相当费时的，但是通过计算角度的和或差以及加减π等方法可以很快求得其余的解。 127

参考文献

[1] B. Roth, J. Rastegar, and V. Scheinman, “On the Design of Computer Controlled Manipulators,” *On the Theory and Practice of Robots and Manipulators*, Vol. 1, First CISM-IFToMM Symposium, September 1973, pp. 93–113.

[2] B. Roth, “Performance Evaluation of Manipulators from a Kinematic Viewpoint,” *Performance Evaluation of Manipulators*, National Bureau of Standards, special publication, 1975.

[3] D. Pieper and B. Roth, “The Kinematics of Manipulators Under Computer Control,” *Proceedings of the Second International Congress on Theory of Machines and Mechanisms*, Vol. 2, Zakopane, Poland, 1969, pp. 159–169.

[4] D. Pieper, "The Kinematics of Manipulators Under Computer Control," Unpublished Ph.D. Thesis, Stanford University, 1968.

[5] R.P. Paul, B. Shimano, and G. Mayer, "Kinematic Control Equations for Simple Manipulators," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, Vol. SMC-11, No. 6, 1981.

[6] L. Tsai and A. Morgan, "Solving the Kinematics of the Most General Six- and Five-degree-of-freedom Manipulators by Continuation Methods," Paper 84-DET-20, ASME Mechanisms Conference, Boston, October 7–10, 1984.

[7] C.S.G. Lee and M. Ziegler, "Geometric Approach in Solving Inverse Kinematics of PUMA Robots," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. AES-20, No. 6, November 1984.

[8] W. Beyer, *CRC Standard Mathematical Tables*, 25th edition, CRC Press, Inc., Boca Raton, FL, 1980.

[9] R. Burington, *Handbook of Mathematical Tables and Formulas*, 5th edition, McGraw-Hill, New York, 1973.

[10] J. Hollerbach, "A Survey of Kinematic Calibration," in *The Robotics Review*, O. Khatib, J. Craig, and T. Lozano-Perez, Editors, MIT Press, Cambridge, MA, 1989.

[11] Y. Nakamura and H. Hanafusa, "Inverse Kinematic Solutions with Singularity Robustness for Robot Manipulator Control," *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 108, 1986.

[12] D. Baker and C. Wampler, "On the Inverse Kinematics of Redundant Manipulators," *International Journal of Robotics Research*, Vol. 7, No. 2, 1988.

[13] L.W. Tsai, *Robot Analysis: The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators*, Wiley, New York, 1999.

习题

4.1 [15]绘制第3章中习题3.3的三连杆操作臂指端工作空间的简图。已知l_1=15.0，l_2=10.0和l_3=3.0。

4.2 [26]推导第3章习题3.3的三连杆操作臂的逆运动学方程。

128 4.3 [12]绘制第3章习题3.4中3自由度操作臂指端工作空间的简图。

4.4 [24]推导第3章习题3.4的3自由度操作臂的逆运动学方程。

4.5 [38]编写一个Pascal（或者C）子程序，用来计算PUMA 560操作臂在如下关节范围内的所有可能解。

$$-170.0 < \theta_1 < 170.0$$
$$-225.0 < \theta_2 < 45.0$$
$$-250.0 < \theta_3 < 75.0$$
$$-135.0 < \theta_4 < 135.0$$
$$-100.0 < \theta_5 < 100.0$$
$$-180.0 < \theta_6 < 180.0$$

将这些数值（英寸）代入4.7节的方程中。

$$a_2 = 17.0$$
$$a_3 = 0.8$$
$$d_3 = 4.9$$
$$d_4 = 17.0$$

4.6 [15] 编写一个简单的算法，从一组可能的解中选择出最短行程的解。

4.7 [10]编制一个表，列出可能影响操作臂重复精度的因素。编制第二个表，列出影响操作臂定位精度的附加因素。

4.8 [12]已知一个三连杆平面旋转关节操作臂手部的期望位姿，有两个可能的解。如果再加入一个旋转关节（在这种情况下操作臂仍然处于同一平面），将会有多少个解？

4.9 [26]图4-13所示为一个具有旋转关节的两连杆平面操作臂，对于这个操作臂，第二个连杆长度为第一个连杆长度的一半，即$l_1=2l_2$。关节的运动范围（单位为角度）为

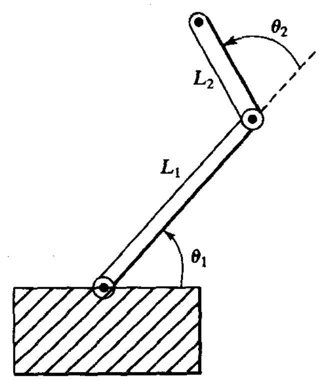


图4-13 两连杆平面操作臂 129

$$0<\theta_1<180$$
$$-90<\theta_2<180$$

绘出第二个连杆端部近似可达工作空间（范围）的简图。

4.10 [23]推导第3章习题3.4中操作臂的子空间表达式。

4.11 [24]一个2自由度工作台用于弧焊工件的定向。工作台支座（连杆2）相对于基座（连杆0）的正运动学变换为

$$ {}^0_2T=\begin{bmatrix} c_1c_2 & -c_1s_2 & s_1 & l_2s_1+l_1 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ -s_1c_2 & s_1s_2 & c_1 & l_2c_1+h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

已知固连于支座（连杆2）上的坐标系的单位方向为${}^2\hat{V}$，求θ_1的逆运动学解，θ_2的矢量沿${}^0\hat{Z}$方向（即向上的），存在多解吗？如果不能得出唯一解，存在奇异条件吗？

4.12 [22]图4-14所示的两个3R机构。在两种情况下，三个轴都相交于一点（在所有位形中，交点在空间固定不变）。图4-14(a)所示的连杆转角$\alpha_i=90°$，图4-14（b）所示的连杆转角$\alpha_1=\phi$，$\alpha_2=180°-\phi$。

可以看出Z-Y-Z的欧拉角适合于图4-14(a)所示的机构，因此连杆3的方向相对于连杆0的方向是任意的（图中箭头所示）。因为$\phi=90°$，因此可以看出其他连杆的方向不能像连杆3那样是任意的。给出第二个机构不可达的方位集合。注意，假设所有的关节都能旋转360°（即无限制），并假设连杆可互相穿过（即工作空间不受自身碰撞的限制）。

4.13 [13]说出封闭形式的解析运动学解优于迭代解的两个原因。

4.14 [14]6自由度机器人没有封闭形式的运动学解。3自由度机器人也没有封闭形式的运动学（位置）解吗？

4.15 [38]写出一个子程序求解封闭形式的四次方程[参见8，9]。

4.16 [25]图4-15所示为一个4R操作臂，非零连杆参数为$a_1=1$，$\alpha_2=45°$，$d_3=\sqrt{2}$和$a_3=\sqrt{2}$，这个机构的位形为$\Theta=[0\ 90°\ -90°\ 0]^T$，每个关节的运动范围为±180°，对于

$$ {}^0P_{4ORG}=[1.1\ 1.5\ 1.707]^T $$

求所有θ_3的值。

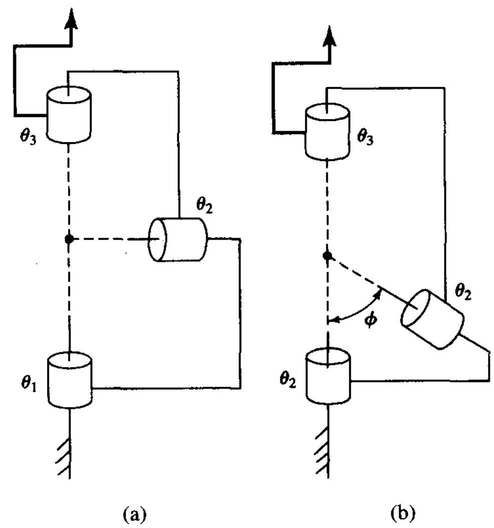


图4-14 两个3R机构（习题4.12）

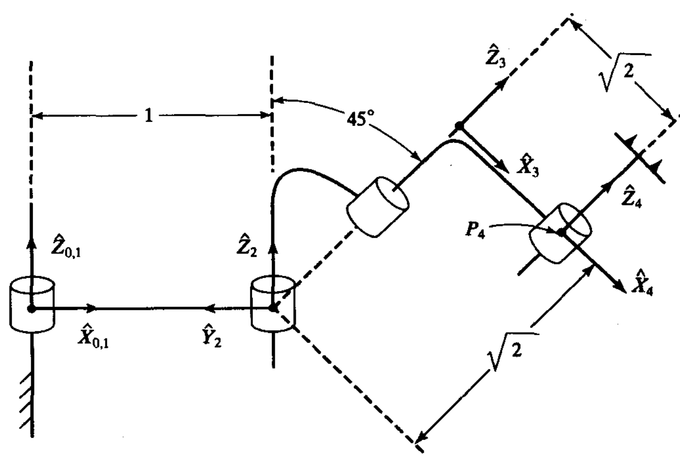


图4-15 4R操作臂，图示位置$\Theta=[0, 90°, -90°, 0]^T$（习题4.16）

4.17 [25] 图4-16所示为一个4R操作臂，非零连杆参数为$\alpha_1=-90°$，$d_2=1$，$\alpha_1=45°$，$d_3=1$和$a_3=1$，这个机构的位形为$\Theta=[0\ \ 0\ \ 90°\ \ 0]^T$，每个关节的运动范围为±180°，对于

$$^0P_{4ORG}=[0.0\ \ 1.0\ \ 1.414]^T$$

求所有θ_3的值。

4.18 [15]参见图3-37所示的RRP操作臂，它的运动学方程（位置）有多少个解？

130~131 4.19 [15]参见图3-38所示的RRR操作臂，它的运动学方程（位置）有多少个解？

4.20 [15]参见图3-39所示的RPP操作臂，它的运动学方程（位置）有多少个解？

4.21 [15]参见图3-40所示的PRR操作臂，它的运动学方程（位置）有多少个解？

4.22 [15]参见图3-41所示的PPP操作臂，它的运动学方程（位置）有多少个解？

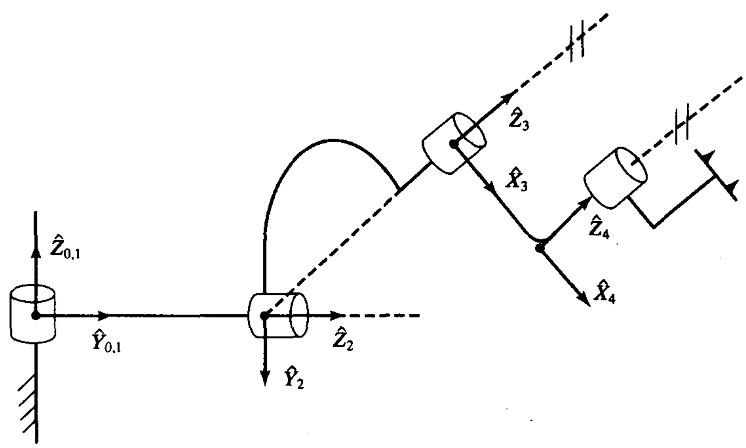


图4-16 4R操作臂，图示位置Θ=[0, 0, 90°, 0]^T（习题4.17）

4.23 [38]对于某一个问题给出下列运动学方程:

$$\sin\xi = a\sin\theta + b$$
$$\sin\phi = c\cos\theta + d$$
$$\psi = \xi + \phi$$

已知a, b, c, d和ψ，在一般情况下，θ有4个解。求一个特定条件，使得θ只有2个解。

4.24 [20]已知由连杆坐标系$\{i-1\}$描述的连杆坐标系$\{i\}$，求4个Denavit-Hartenberg参数，它们是 ${}^{i-1}_{i}T$ 中元素的函数。

编程习题

1. 写出一个计算4.4节中三连杆操作臂的逆运动学子程序。这个子程序应以如下形式进行定义

```
Procedure INVKIN(VAR wrelb: frame; VAR current, near, far: vec3;
VAR sol: boolean);
```

其中，“wrelb”是一个输入量，代表相对于基坐标系的腕部坐标系；“current”也是一个输入量，代表机器人当前的位置信息（通过关节角矢量给出）；“near”是最短行程解；“far”是第二个解；“sol”是一个表示是否找到解的标志。（如果没有解，sol=FALSE）连杆长度（m）为

$$l_1=l_2=0.5$$ [132]

关节运动范围

$$-170° < \theta_i < 170°$$

测试你的程序，用KIN反复调用这个程序，证明它们的确是互逆的。

2. 一个工具连接在操作臂的连杆3上，工具坐标系相对于腕部坐标系的描述为 ${}^{W}_{T}T$。用户要求的工作空间可表示为工作台坐标系相对于机器人基坐标系 ${}^{B}_{S}T$。写出这个子程序

```
Procedure SOLVE(VAR trels: frame; VAR current, near, far: vec3;
VAR sol: boolean);
```

其中“trels”代表相对于坐标系{S}的坐标系{T}。其他参数均在INVKIN子程序中。$\{T\}$

和{S}定义为全局变量或常数。SOLVE用来调用TMULT，TINVERT和INVKIN。

3. 写出一个由x，y和ϕ描述的目标坐标系的主程序。这个目标相对于{S}定义为{T}，用户可用这种方法确定目标。

像编程习题中那样，机器人在相同的工作空间里使用相同的工具。因此，{T}和{S}定义为

$$ {}^{W}_{T}T=[x\ y\ \theta]=[0.1\ \ 0.2\ \ 30.0] $$

$$ {}^{B}_{S}T=[x\ y\ \theta]=[-0.1\ \ 0.3\ \ 0.0] $$

计算下列三个目标坐标系的关节角:

$$ [x_1\ y_1\ \phi_1]=[0.0\ \ 0.0-\ \ 90.0] $$

$$ [x_2\ y_2\ \phi_2]=[0.6\ \ -0.3\ \ 45.0] $$

$$ [x_3\ y_3\ \phi_3]=[-0.4\ \ 0.3\ \ 120.0] $$

$$ [x_4\ y_4\ \phi_4]=[0.8\ \ 1.4\ \ 30.0] $$

假定机器人开始运动时所有关节角均为0.0，并且依次运动到这三个目标位置。程序可以找到相对于前一个目标点的最短行程解。反复调用SOLVE和WHERE保证它们的确是互逆函数。

MATLAB习题

这个练习集中讨论平面3自由度3R机器人的姿态逆运动学解。(参见图3-6和3-7；图3-8中给出了DH参数。) 已知固定长度参数如下: L_1=4, L_2=3和L_3=2(m)。

a) 用手算，求这个机器人的姿态逆运动学解析解：已知 ${}^{0}_{H}T$，计算$\{\theta_1\ \theta_2\ \theta_3\}$所有可能的多重解。(文中给出了三种方法，选择其中一种)。提示：为了简化这个方程，首先从 ${}^{0}_{H}T$ 和 L_3计算 ${}^{0}_{3}T$ 。

b) 编写一个MATLAB程序求解平面3R机器人的全部姿态逆运动学解（即，求出所有可能的多重解)。根据以下输入要求对你的程序进行测试:

133

i) $ {}^{0}_{H}T=\begin{bmatrix}1&0&0&9\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} $

ii) $ {}^{0}_{H}T=\begin{bmatrix}0.5&-0.866&0&7.5373\\0.866&0.6&0&3.9266\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} $

iii) $ {}^{0}_{H}T=\begin{bmatrix}0&1&0&-3\\-1&0&0&2\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} $

iv) $^{0}_{H}T=\begin{bmatrix}0.866 & 0.5 & 0 & -3.1245\\ -0.5 & 0.866 & 0 & 9.1674\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

对于所有情况，使用循环校验来验证你的结果，将每一组关节角的结果（针对每一个多重解）代入到姿态正运动学MATLAB程序中，验证你原来求得的 $^{0}_{H}T$ 。

c) 应用Corke MATLAB Robotics工具箱验证所有结果。试用函数*ikine*()。 134

第5章　速度和静力

5.1　概述

在本章中，我们将机器人操作臂的讨论扩展到静态位置问题以外。我们研究刚体线速度和角速度的表示方法并且运用这些概念去分析操作臂的运动。我们将讨论作用在刚体上的力，然后应用这些概念去研究操作臂静力学的应用问题。

可以看到关于速度和静力的研究将得出一个称为操作臂**雅克比**⊖的实矩阵，该矩阵将在本章中介绍。

在本章中对机构运动学领域的研究内容并没有作深入讨论，对于大多数问题的讨论仅限于机器人学专题中的一些基本概念。建议有兴趣的读者可进一步参考一些力学专著[1－3]。

5.2　时变位姿的符号表示

在研究刚体运动的描述之前，先简单讨论一些基本知识：矢量的微分，角度速的表示法
135 和符号。

位置矢量的微分

速度（以及第6章中的加速度）是需要研究的基本问题，可用下面符号表示某个矢量的微分：

$$^{B}V_{Q}=\frac{d}{dt}{}^{B}Q=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{^{B}Q(t+\Delta t)-{}^{B}Q(t)}{\Delta t} \tag{5-1}$$

位置矢量的速度可以看成是用位置矢量描述的空间一点的线速度。由式（5-1）可以看出，可以通过计算Q相对于坐标系$\{B\}$的微分进行描述。例如，如果相对于坐标系$\{B\}$，Q不随时间变化，那么速度就为零，尽管在其他一些坐标系中Q是变化的。因此，重要的是必须说明一个矢量是相对于哪个坐标系求微分。

像其他矢量一样，速度矢量能在任意坐标系中描述，其参考坐标系可以用左上标注明。因此，如果在坐标系$\{A\}$中表示式（5-1）的速度矢量，可以写为

$$^{A}(^{B}V_{Q})=\frac{^{A}d}{dt}{}^{B}Q \tag{5-2}$$

可以看出，在通常的情况下，速度矢量都是与空间的某点相关的，而描述此点速度的大小取决于两个坐标系：一个是进行微分运算的坐标系，另一个是描述这个速度矢量的坐标系。

在式（5-1）中，速度是用微分坐标系描述的，因此这个结果用左上标B注明。但是，为简单起见，当两个上标相同时，不需要给出外层上标，即可以写为

$$^{B}(^{B}V_{Q})={}^{B}V_{Q} \tag{5-3}$$

⊖　数学上称它为“雅克比矩阵”，但机器人学通常简称为“雅克比”。

最后，由于进行参考坐标系变换的旋转矩阵已可清楚地表示这个关系，因此总是省略掉外部左上标，可以写为

$$^A(^BV_Q)={}^A_BR\,^BV_Q \tag{5-4}$$

通常按照式（5-4）右边的形式给出速度的表达式，因此描述速度的符号总是代表微分坐标系中的速度，而没有外部左上标。

经常讨论的是一个坐标系原点相对于某个常见的世界参考坐标系的速度，而不考虑相对于任意坐标系中一般点的速度。对于这种特殊情况，定义一个缩写符号

$$v_C={}^UV_{CORG} \tag{5-5}$$

式中的点为坐标系$\{C\}$的原点，参考坐标系为$\{U\}$。例如，用符号v_C表示坐标系$\{C\}$原点的速度；^Av_C是坐标系$\{C\}$的原点在坐标系$\{A\}$中表示的速度（尽管微分是相对于坐标系$\{U\}$进行的）。 136

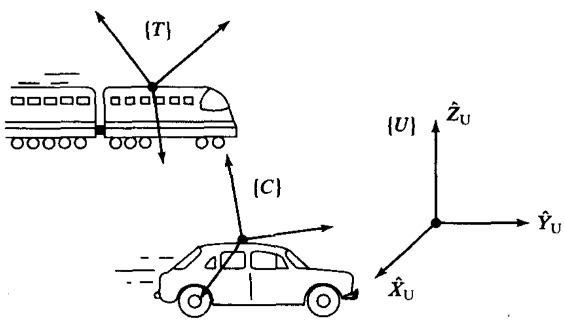


图5-1 几个直线运动坐标系的例子

例5.1

图5-1所示为固定的世界坐标系$\{U\}$，坐标系$\{T\}$固连在速度为100哩/小时的火车上，坐标系$\{C\}$固连在速度为30哩/小时的汽车上。两车的前进方向为$\{U\}$的$\hat{X}$方向。旋转矩阵^U_TR和^U_CR为已知且为常数。

求 $\frac{^Ud}{dt}\,^UP_{CORG}$

$$\frac{^Ud}{dt}\,^UP_{CORG}={}^UV_{CORG}=v_C=30\hat{X}$$

求 $^C(^UV_{TORG})$

$$^C(^UV_{TORG})={}^Cv_T={}^C_URv_T={}^C_UR(100\hat{X})={}^U_CR^{-1}100\hat{X}$$

求 $^C(^TV_{CORG})$

$$^C(^TV_{CORG})={}^C_TR\,^TV_{CORG}=-{}^U_CR^{-1}\,^U_TR70\hat{X}$$

角速度矢量

现在介绍**角速度矢量**，用符号Ω表示。线速度描述了点的一种属性，角速度描述了刚体的

一种属性。坐标系总是固连在被描述的刚体上，所以可以用角速度来描述坐标系的旋转运动。

在图5-2中，${}^{A}\Omega_{B}$ 描述了坐标系{B}相对于坐标系{A}的旋转。实际上，${}^{A}\Omega_{B}$ 的方向就是{B}相对于{A}的瞬时旋转轴，${}^{A}\Omega_{B}$ 的大小表示旋转速度。像任意矢量一样，角速度矢量可以在任意坐标系中描述，所以需要附加另一个左上标，例如，${}^{C}({}^{A}\Omega_{B})$就是坐标系{B}相对于坐标系{A}的角速度在坐标系{C}中的描述。

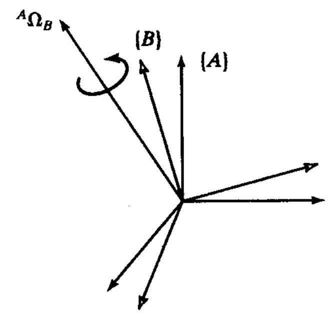


图5-2 坐标系{B}相对于坐标系{A}以角速度 ${}^{A}\Omega_{B}$ 旋转

对于一种重要的特殊情况，再介绍一个简化符号，即已知参考坐标系非常简单以致不需要符号表示:

$$\omega_{C}={}^{U}\Omega_{C} \qquad (5\text{-}6)$$

这里，ω_{C} 为坐标系{C}相对于某个已知参考坐标系{U}的角速度。例如：${}^{A}\omega_{C}$ 是坐标系{C}的角速度在坐标系{A}中的描述（尽管这个角速度是相对于坐标系{U}的）。

5.3 刚体的线速度和角速度

在本节中，将讨论刚体的运动描述，主要与速度有关。这些概念将第2章中关于平移和转动的描述扩展到时变的情况。在第6章中，还要将这些概念扩展到加速度的研究。

与第2章中一样，把坐标系固连在所要描述的刚体上。刚体运动等同于一个坐标系相对于另一个坐标系的运动。

线速度

把坐标系{B}固连在一刚体上，要求描述相对于坐标系{A}的运动${}^{B}Q$，如图5-3所示。这里已经认为坐标系{A}是固定的。

坐标系{B}相对于坐标系{A}的位置用位置矢量 ${}^{A}P_{BORG}$ 和旋转矩阵 ${}^{A}_{B}R$ 来描述。此时，假定方位 ${}^{A}_{B}R$ 不随时间变化，则Q点相对于坐标系{A}的运动是由于 ${}^{A}P_{BORG}$ 或 ${}^{B}Q$ 随时间的变化引起的。

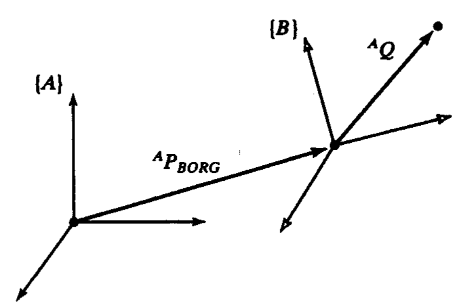


图5-3 坐标系{B}以速度 ${}^{A}V_{BORG}$ 相对于坐标系{A}平移

求解坐标系{A}中Q点的线速度是非常简单的。只要写出坐标系{A}中的两个速度分量，求其和为:

$${}^{A}V_{Q}={}^{A}V_{BORG}+{}^{A}_{B}R\,{}^{B}V_{Q} \qquad (5\text{-}7)$$

方程（5-7）只适用于坐标系{B}和坐标系{A}的相对方位保持不变的情况。

角速度

现在讨论两坐标系的原点重合、相对线速度为零的情况，而且它们的原点始终保持重合。

其中一个或这两个坐标系固连在刚体上，但是为清楚起见，在图5-4没有表示出刚体。

坐标系{B}相对于坐标系{A}的方位是随时间变化的。如图5-4所示，{B}相对于{A}的旋转速度用矢量 ${}^A\Omega_B$ 来表示。已知矢量 ${}^BQ$ 确定了坐标系{B}中一个固定点的位置。现在，考虑最重要的问题：从坐标系{A}看固定在坐标系{B}中的矢量，这个矢量将如何随时间变化？这个系统是否转动？

假设从坐标系{B}看矢量Q是不变的，即

$$ {}^BV_Q=0 \tag{5-8} $$

既然它相对于{B}不变，显然从坐标系{A}中看点Q的速度为旋转角速度 ${}^A\Omega_B$ 。为求点Q的速度，可用一个直观的方法。图5-5所示为用两个瞬时量表示矢量Q绕 ${}^A\Omega_B$ 的旋转。这是从坐标系{A}中观测到的。

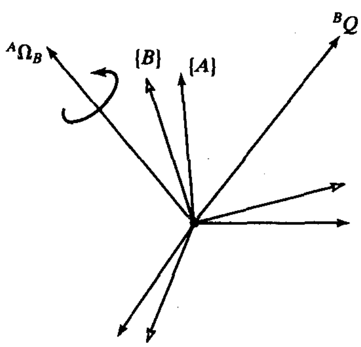


图5-4 固定在坐标系{B}中的矢量 ${}^BQ$ 以角速度 ${}^A\Omega_B$ 相对于坐标系{A}旋转

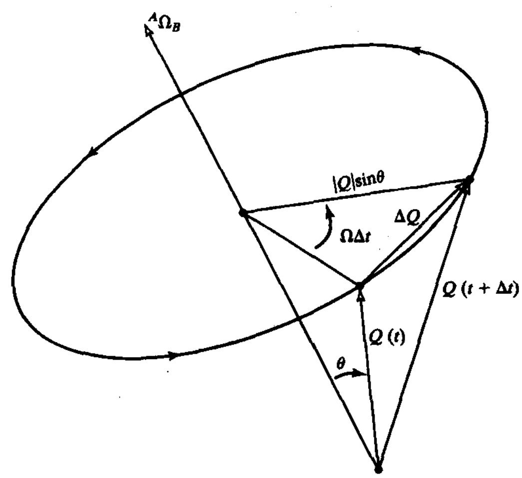


图5-5 用角速度表示的点的速度

由图5-5，可以计算出这个从坐标系{A}中观测到的矢量的方向和大小的变化。第一，显然${}^AQ$ 的微分增量一定垂直于 ${}^A\Omega_B$ 和${}^AQ$；第二，从图5-5可以看出微分增量的大小为

$$ |\Delta Q|=(|{}^AQ|\sin\theta)(|{}^A\Omega_B|\Delta t) \tag{5-9} $$

有了大小和方向这些条件，即可得到矢量积。实际上，这些矢量的大小和方向满足下面算式

$$ {}^AV_Q={}^A\Omega_B\times{}^AQ \tag{5-10} $$

在一般情况下，矢量Q是相对于坐标系{B}变化的，因此要加上此分量，得

$$ {}^AV_Q={}^A({}^BV_Q)+{}^A\Omega_B\times{}^AQ \tag{5-11} $$

利用旋转矩阵消掉双上标，注意在任一瞬时矢量${}^AQ$ 的描述为 ${}^A_BR\,{}^BQ$ ，最后得到

$$ {}^AV_Q={}^A_BR\,{}^BV_Q+{}^A\Omega_B\times{}^A_BR\,{}^BQ \tag{5-12} $$

线速度和角速度同时存在的情况

可以非常容易地将式（5-12）扩展到原点不重合的情况，通过把原点的线速度加到式（5-12）中去，可以得到从坐标系{A}观测坐标系{B}中固定速度矢量的普遍公式:

137~140

$$^{A}V_{Q}={}^{A}V_{BORG}+{}^{A}_{B}R\,{}^{B}V_{Q}+{}^{A}\Omega_{B}\times{}^{A}_{B}R\,{}^{B}Q \tag{5-13}$$

方程（5-13）是从固定坐标系观测运动坐标系中的矢量微分的最终结果。

5.4 对角速度的进一步研究

在本节中，将进一步研究角速度，特别是式（5-10）的微分。前一节用几何方法证明了式（5-10）的有效性，这里将引入数学方法。初次阅读本书的读者可以跳过本节。

正交矩阵的导数的性质

我们可以推出正交矩阵和某一反对称矩阵之间的一种特殊关系。对于任何$n\times n$正交矩阵R，有

$$RR^{T}=I_{n} \tag{5-14}$$

式中，I_n 是$n\times n$单位阵。另外，我们关心的是n=3，R为特征正交矩阵，即旋转矩阵的情况。对式（5-14）求导得到

$$\dot{R}R^{T}+R\dot{R}^{T}=0_{n} \tag{5-15}$$

式中0_n 为$n\times n$的零矩阵。方程（5-15）可以写为

$$\dot{R}R^{T}+(\dot{R}R^{T})^{T}=0_{n} \tag{5-16}$$

定义

$$S=\dot{R}R^{T} \tag{5-17}$$

由式（5-16）得

$$S+S^{T}=0_{n} \tag{5-18}$$

S为反对称矩阵。因此正交矩阵的微分与反对称矩阵之间存在如下特性，可写为

$$S=\dot{R}R^{-1} \tag{5-19}$$

由于参考系旋转的点速度

假定固定矢量^{B}P 相对于坐标系{B}是不变的，在另一个坐标系{A}中的描述为

$$^{A}P={}^{A}_{B}R\,{}^{B}P \tag{5-20}$$

如果坐标系{B}是旋转的（ ${}^{A}_{B}\dot{R}$ 的微分非零），^{A}P 也是变化的，即使^{B}P 为常数，即

$$^{A}\dot{P}={}^{A}_{B}\dot{R}\,{}^{B}P \tag{5-21}$$

或用速度符号写为

141

$$^{A}V_{P}={}^{A}_{B}\dot{R}\,{}^{B}P \tag{5-22}$$

在式（5-22）中代入${}^BP$的表达式，得

$$ {}^AV_P={}^A_B\dot{R}\,{}^A_BR^{-1}\,{}^AP \tag{5-23} $$

对于正交矩阵利用式（5-19），有

$$ {}^AV_P={}^A_BS\,{}^AP \tag{5-24} $$

式中用S的上下标表明它是与旋转矩阵${}^A_BR$相关的反对称矩阵，由于它出现在式（5-24）中，且为了便于理解的原因，因此这里所说的旋转矩阵通常称为**角速度矩阵**。

反对称矩阵和矢量积

如果反对称矩阵S的各元素如下

$$ S=\begin{bmatrix} 0 & -\Omega_x & \Omega_y \\ \Omega_x & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{bmatrix} \tag{5-25} $$

定义3×1的列矢量

$$ \Omega=\begin{bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{bmatrix} \tag{5-26} $$

容易证明

$$ SP=\Omega\times P \tag{5-27} $$

式中，P为任意矢量，×表示矢量积。

与3×3的角速度矩阵相对应的3×1矢量Ω称为**角速度矢量**，这已在5.2节中作了介绍。因此，与式（5-24）联立可写为

$$ {}^AV_P={}^A\Omega_B\times{}^AP \tag{5-28} $$

式中与Ω相关的符号表明该角速度矢量确定了坐标系$\{B\}$相对于坐标系$\{A\}$运动的。

建立关于角速度矢量的物理概念

结论可以证明式（5-28）中的矢量Ω是确实存在的，现在我们希望了解它的物理意义。可以通过旋转矩阵直接求导求得Ω

$$ \dot{R}=\lim_{\Delta t\to0}\frac{R(t+\Delta t)-R(t)}{\Delta t} \tag{5-29} $$

现在把$R(t+\Delta t)$写为两个矩阵的组合

$$ R(t+\Delta t)=R_K(\Delta\theta)R(t) \tag{5-30} $$ 142

式中，在时间间隔Δt中，绕轴$\hat{K}$的微量旋转为$\Delta\theta$。利用式（5-30），式（5-29）可写为

$$ \dot{R}=\lim_{\Delta t\to0}\left(\frac{R_K(\Delta\theta)-I_3}{\Delta t}R(t)\right) \tag{5-31} $$

即

$$\dot{R}=\left(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{R_K(\Delta\theta)-I_3}{\Delta t}\right)R(t) \tag{5-32}$$

对式（2-80）进行角度微分变换得

$$R_K(\Delta\theta)=\begin{bmatrix}1 & -k_z\Delta\theta & k_y\Delta\theta\\ k_z\Delta\theta & 1 & -k_x\Delta\theta\\ -k_y\Delta\theta & k_x\Delta\theta & 1\end{bmatrix} \tag{5-33}$$

所以，式（5-32）可写为

$$\dot{R}=\left(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\begin{bmatrix}0 & -k_z\Delta\theta & k_y\Delta\theta\\ k_z\Delta\theta & 0 & -k_x\Delta\theta\\ -k_y\Delta\theta & k_x\Delta\theta & 0\end{bmatrix}}{\Delta t}\right)R(t) \tag{5-34}$$

最后，用Δt除以这个矩阵，并取极限得

$$\dot{R}=\begin{bmatrix}0 & -k_z\dot{\theta} & k_y\dot{\theta}\\ k_z\dot{\theta} & 0 & -k_x\dot{\theta}\\ -k_y\dot{\theta} & k_x\dot{\theta} & 0\end{bmatrix}R(t) \tag{5-35}$$

因此有

$$\dot{R}R^{-1}=\begin{bmatrix}0 & -\Omega_z & \Omega_y\\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x\\ -\Omega_y & \Omega_x & 0\end{bmatrix} \tag{5-36}$$

式中

$$\Omega=\begin{bmatrix}\Omega_x\\ \Omega_y\\ \Omega_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k_x\dot{\theta}\\ k_y\dot{\theta}\\ k_z\dot{\theta}\end{bmatrix}=\dot{\theta}\hat{K} \tag{5-37}$$

角速度矢量Ω的物理意义是，在任一时刻，旋转坐标系方位的变化可以看作是绕某个轴 $\hat{K}$ 的旋转。这个**瞬时转动轴**，可作为单位矢量，与绕这个轴的旋转速度标量 $\dot{\theta}$ 构成角速度矢量。

角速度的其他描述方法

角速度还可以采用其他描述，例如，假设一个旋转刚体的角速度可以用Z-Y-Z欧拉角速率表示:

$$\dot{\Theta}_{Z'Y'Z'}=\begin{bmatrix}\dot{\alpha}\\ \dot{\beta}\\ \dot{\gamma}\end{bmatrix} \tag{5-38}$$

通过这种形式的描述，或应用24种**角坐标系**当中的任意一种描述，就可以推导出等效的角速度矢量。

已知

$$\dot{R}R^T = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{bmatrix} \tag{5-39}$$

从这个矩阵方程可以得到3个独立的方程，即

$$\begin{aligned} \Omega_x &= \dot{r}_{31}r_{21} + \dot{r}_{32}r_{22} + \dot{r}_{33}r_{23} \\ \Omega_y &= \dot{r}_{11}r_{31} + \dot{r}_{12}r_{32} + \dot{r}_{13}r_{33} \\ \Omega_z &= \dot{r}_{21}r_{11} + \dot{r}_{22}r_{12} + \dot{r}_{23}r_{13} \end{aligned} \tag{5-40}$$

通过式（5-40）并按照角坐标系的符号表示R，可以得到角坐标系速度和等效的角速度矢量关系的表达式。该结果可以转化成矩阵形式，例如，对于Z-Y-Z欧拉角，

$$\Omega = E_{Z'Y'Z'}(\Theta_{Z'Y'Z'})\dot{\Theta}_{Z'Y'Z'} \tag{5-41}$$

式中，$E(\dot{A})$是一个雅可比矩阵，它表示了角坐标系速度矢量和角速度矢量的关系，同时它也是这个角坐标系瞬时值的函数。$E(\dot{A})$的形式取决于给定的角坐标系，因此，用一个上标表示这个角坐标系。

例5.2

构造E矩阵，表示Z-Y-Z欧拉角与角速度矢量的关系，即求式（5-41）中的$E_{Z'Y'Z'}$。

应用式（2-72）和式（5-40），通过必要的符号微分，可以得到

$$E_{Z'Y'Z'} = \begin{bmatrix} 0 & -s\alpha & c\alpha s\beta \\ 0 & c\alpha & s\alpha s\beta \\ 1 & 0 & c\beta \end{bmatrix} \tag{5-42}$$

■

5.5 机器人连杆的运动

在机器人连杆运动的分析中，一般使用连杆坐标系{0}作为参考坐标系。因此，v_i是连杆坐标系原点{i}的线速度，ω_i是连杆坐标系{i}的角速度。

在任一瞬时，机器人的每个连杆都具有一定的线速度和角速度。图5-6所示为连杆i的这些矢量。通过这个例子表明，这些矢量均是在坐标系{i}中描述的。

5.6 连杆间的速度传递

现在讨论计算机器人连杆线速度和角速度的问题。操作臂是一个链式结构，每一个连杆的运动都与它的相邻杆有关。由于这种结构的特点，我们可以由基坐标系依次计算各连杆的 144
速度。连杆i+1的速度就是连杆i的速度加上那些附加到关节i+1上的新的速度分量。⊖

⊖ 注意线速度是相对于一点的，而角速度是相对于一个物体的。因此，“连杆的速度”指的是连杆坐标系原点的线速度和连杆的角速度。

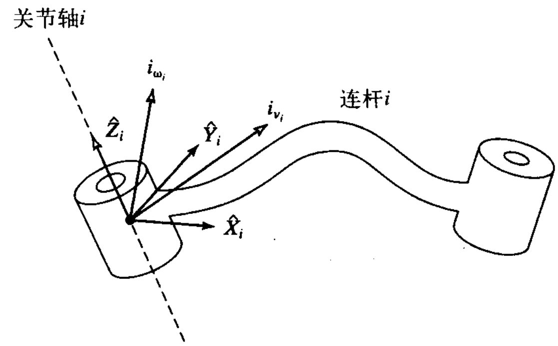


图5-6 连杆i的速度可以用矢量v_i和ω_i确定，在任何坐标系中均可以这样表示，包括坐标系$\{i\}$

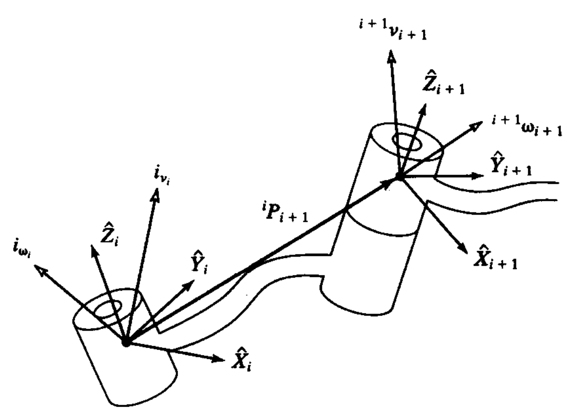
如图5-6所示，将机构的每一个连杆看作为一个刚体，可以用线速度矢量和角速度矢量描述其运动。进一步，我们可以用连杆坐标系本身描述这些速度，而不用基坐标系。图5-7所示为连杆i和$i+1$，以及在连杆坐标系中定义的速度矢量。

当两个ω矢量都是相对于同一个坐标系时，那么这些角速度能够相加。因此，连杆$i+1$的角速度就等于连杆i的角速度加上一个由于关节$i+1$的角速度引起的分量。参照坐标系$\{i\}$，上述关系可写成

$$^{i}\omega_{i+1}={}^{i}\omega_{i}+{}_{i+1}^{i}R\dot{\theta}_{i+1}{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} \tag{5-43}$$

注意，

$$\dot{\theta}_{i+1}{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}={}^{i+1}\begin{bmatrix}0\\0\\\dot{\theta}_{i+1}\end{bmatrix} \tag{5-44}$$



145

图5-7 相邻连杆的速度矢量

我们曾利用坐标系$\{i\}$与坐标系$\{i+1\}$之间的旋转变换矩阵表达坐标系$\{i\}$中由于关节运动引起的附加旋转分量。这个旋转矩阵绕关节$i+1$的旋转轴进行旋转变换，变换为在坐标系$\{i\}$中的描述后，这两个角速度分量才能够相加。

在方程式（5-43）两边同时左乘${}_{i}^{i+1}R$，可以得到连杆$i+1$的角速度相对于坐标系$\{i+1\}$的表

达式:

$$^{i+1}\omega_{i+1}={}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}\omega_{i}+\dot{\theta}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} \tag{5-45}$$

坐标系$\{i+1\}$原点的线速度等于坐标系$\{i\}$原点的线速度加上一个由于连杆i的角速度引起的新的分量。这与式（5-13）描述的情况完全相同。由于$^{i}P_{i+1}$在坐标系$\{i\}$中是常数，所以其中一项就消失了。因此有

$$^{i}\upsilon_{i+1}={}^{i}\upsilon_{i}+{}^{i}\omega_{i}\times{}^{i}P_{i+1} \tag{5-46}$$

上式两边同时左乘$^{i+1}_{i}R$，得

$$^{i+1}\upsilon_{i+1}={}^{i+1}_{i}R({}^{i}\upsilon_{i}+{}^{i}\omega_{i}\times{}^{i}P_{i+1}) \tag{5-47}$$

式（5-45）和式（5-47）可能是本章中最重要的结论。对于关节$i+1$为移动关节的情况，相应的关系为

$$\begin{aligned}&^{i+1}\omega_{i+1}={}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}\omega_{i}\\&^{i+1}\upsilon_{i+1}={}^{i+1}_{i}R({}^{i}\upsilon_{i}+{}^{i}\omega_{i}\times{}^{i}P_{i+1})+\dot{d}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}\end{aligned} \tag{5-48}$$

从一个连杆到下一个连杆依次应用这些公式，可以计算出最后一个连杆的角速度$^{N}\omega_{N}$和线速度$^{N}\upsilon_{N}$，注意，这两个速度是按照坐标系$\{N\}$表达的。在后面可以看到，这个结果是非常有用的。如果用基坐标系来表达角速度和线速度的话，就可以用$^{0}_{N}R$去左乘速度，向基坐标进行旋转变换。

例5.3

图5-8所示是具有两个转动关节的操作臂。计算出操作臂末端的速度，将它表达成关节速度的函数。给出两种形式的解答，一种是用坐标系{3}表示的，另一种是用坐标系{0}表示的。

如图5-9所示，坐标系{3}固连于操作臂末端，求用坐标系{3}表示的该坐标系原点的速度。对于这个问题的第二部分，求用坐标系{0}表示的这些速度。同以前一样，首先将坐标系固连在连杆上（如图5-9所示）。 146

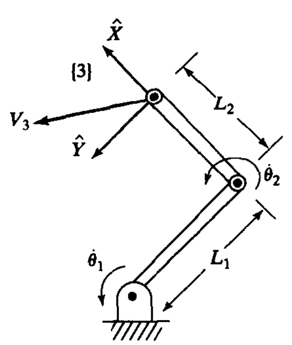


图5-8 两连杆操作臂

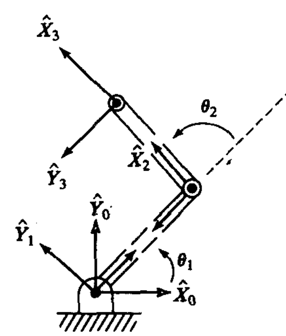


图5-9 两连杆操作臂的坐标系布局

运用式（5-45）和式（5-47）从基坐标系{0}开始依次计算出每个坐标系原点的速度，其中基坐标系的速度为0。由于式（5-45）和式（5-47）将应用到连杆变换，因此先将它们计算

如下:

$$
{}^0_1T=\begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^1_2T=\begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & l_1 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5-49}
$$

$$
{}^2_3T=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

147

注意上式与例3.3的操作臂中的结果是一致的，且关节3的转角恒为0度。坐标系{2}和坐标系{3}之间的变换不必转化成标准的连杆变换形式（尽管这样做可能是有用的）。对各连杆依次使用式（5-45）和式（5-47），计算如下

$$
{}^1\omega_1=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \tag{5-50}
$$

$$
{}^1\upsilon_1=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5-51}
$$

$$
{}^2\omega_2=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \tag{5-52}
$$

$$
{}^2\upsilon_2=\begin{bmatrix} c_2 & s_2 & 0 \\ -s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ l_1\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} l_1s_2\dot{\theta}_1 \\ l_1c_2\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5-53}
$$

$$
{}^3\omega_3={}^2\omega_2 \tag{5-54}
$$

$$
{}^3\upsilon_3=\begin{bmatrix} l_1s_2\dot{\theta}_1 \\ l_1c_2\dot{\theta}_1+l_2(\theta_1+\dot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5-55}
$$

式（5-55）即为答案。同时，坐标系{3}的角速度由式（5-54）给出。

为了得到这些速度相对于固定基坐标系的表达，用旋转矩阵 ${}^0_3R$ 对它们作旋转变换，即

$$ {}^0_3R={}^0_1R\,{}^1_2R\,{}^2_3R=\begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 \\ s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5-56} $$

通过这个变换可以得到

$$ {}^0v_3=\begin{bmatrix} -l_1s_1\dot{\theta}_1-l_2s_{12}(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2) \\ l_1c_1\dot{\theta}_1+l_2c_{12}(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5-57} $$

■

指出式（5-45）和式（5-47）的两个完全不同的用途是很重要的。首先，可以利用它们推导解析表达式，见前面的例5.3。在这里，可利用符号方程进行推导，直到得出形如式（5-55）的方程，这样可针对某个应用问题应用计算机进行计算。其次，正如上面的推导过程，可利用符号方程直接计算出式（5-45）和式（5-47）。这样很容易将它们写成子程序，然后通过迭代方法计算出连杆的速度。为此，它们可以用于任何一种操作臂，而不必为每个特定的操作臂推导方程。然而，计算的数值解是隐式的结构。我们常关心如同式（5-55）所示的解析解的结构。如果我们不厌其烦的去计算式（5-50）到式（5-57），通常会发现，由计算机完成的计算量就会较少。 148

5.7 雅可比

雅可比矩阵是多元形式的导数。例如，假设有6个函数，每个函数都有6个独立的变量：

$$ \begin{aligned} y_1&=f_1(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6) \\ y_2&=f_2(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6) \\ &\vdots \\ y_6&=f_6(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6) \end{aligned} \tag{5-58} $$

也可以用矢量符号表示这些等式：

$$ Y=F(X) \tag{5-59} $$

现在，如果想要计算出y_i的微分关于x_j的微分的函数，可简单应用多元函数求导法则计算，得到

$$ \begin{aligned} \delta y_1&=\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\delta x_1+\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\delta x_2+\cdots+\frac{\partial f_1}{\partial x_6}\delta x_6 \\ \delta y_2&=\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\delta x_1+\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\delta x_2+\cdots+\frac{\partial f_2}{\partial x_6}\delta x_6 \\ &\vdots \\ \delta y_6&=\frac{\partial f_6}{\partial x_1}\delta x_1+\frac{\partial f_6}{\partial x_2}\delta x_2+\cdots+\frac{\partial f_6}{\partial x_6}\delta x_6 \end{aligned} \tag{5-60} $$

将上述式子写成更为简单的矢量表达式：

$$\delta Y = \frac{\partial F}{\partial X}\delta X \tag{5-61}$$

式（5-61）中的6 × 6偏导数矩阵就是我们所说的雅可比矩阵J。注意到，如果$f_1(X)$到$f_6(X)$都是非线性函数，那么这些偏导数都是x_i的函数，因此可以表示如下

$$\delta Y = J(X)\delta X \tag{5-62}$$

将上式两端同时除以时间的微分，可以将雅可比矩阵看成是X中的速度向Y中速度的映射:

$$\dot{Y} = J(X)\dot{X} \tag{5-63}$$

在任一瞬时，X都有一个确定的值，$J(X)$是个线性变换。在每一个新时刻，如果X改变，线性
149 变换也会随之而变。所以，雅可比是时变的线性变换。

在机器人学中，通常使用雅可比将关节速度与操作臂末端的笛卡儿速度联系起来，比如，

$$^0\nu = {}^0J(\Theta)\dot{\Theta} \tag{5-64}$$

式中，Θ是操作臂关节角矢量，ν是笛卡儿速度矢量。在式（5-64）中，我们给雅可比表达式附加了左上标，以此表示笛卡儿速度所参考的坐标系。有时，由于参考坐标系很明显而不用说明，或者对后续推导并不重要时，这个左上标就可以略去。注意到，对于任意已知的操作臂位形，关节速度和操作臂末端速度的关系是线性的，然而这种线性关系仅是瞬时的，因为在下一刻，雅可比矩阵就会有微小的变化。对于通常的6关节机器人，雅可比矩阵是6 × 6阶的矩阵，$\dot{\Theta}$是6 × 1维的，$^0\nu$也是6 × 1维的。这个6 × 1笛卡儿速度矢量是由一个3 × 1的线速度矢量和一个3 × 1的角速度矢量组合起来的:

$$^0\nu = \begin{bmatrix} ^0\upsilon \\ ^0\omega \end{bmatrix} \tag{5-65}$$

可以定义任何维数的雅可比矩阵（包括非方阵形式）。雅可比矩阵的行数等于操作臂在笛卡儿空间的自由度数量，雅可比矩阵的列数等于操作臂的关节数量。例如，对于平面操作臂，虽然雅可比矩阵不可能超过3行，但对于冗余度平面操作臂，可以有任意多个列（列数和关节数相等）。

对于两连杆的操作臂，可以写出一个2 × 2的雅可比矩阵，该矩阵将关节速度和末端执行器的速度联系起来。利用例5.3的结果，可以很容易地给出两连杆操作臂的雅可比矩阵。可以由式（5-55）写出坐标系{3}中的雅可比表达式

$$^3J(\Theta) = \begin{bmatrix} l_1 s_2 & 0 \\ l_1 c_2 + l_2 & l_2 \end{bmatrix} \tag{5-66}$$

由式（5-57）可以写出坐标系{0}中的雅可比表达式

$$^0J(\Theta) = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} & -l_2 s_{12} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} & l_2 c_{12} \end{bmatrix} \tag{5-67}$$

注意，在上述两种情况下，都选择了一个方阵将关节速度和末端执行器的速度联系起来。当然，也可以选择包含末端执行器角速度的3 × 2阶雅可比矩阵。

通过从式（5-58）到式（5-62）建立雅可比矩阵的过程，我们会发现，也可以通过对机构的运动方程直接微分来求得雅可比矩阵。这样可以直接求得线速度，但却得不到3 × 1的方

位矢量，而这个矢量的导数就是ω。我们已经介绍了一种方法，就是通过依次使用式（5-45）和式（5-47）求出雅可比矩阵。也可以应用另外的几种方法来求（参阅[4]），在5.8节中将简要介绍其中一种方法。采用本文所述方法求雅可比矩阵的原因之一，就是为第6章讨论的内容作准备。在第6章中，我们将采用类似的方法来计算操作臂运动的动力学方程。 150

雅可比矩阵参考坐标系的变换

已知坐标系$\{B\}$中的雅可比矩阵，即

$$\begin{bmatrix} {}^{B}v \\ {}^{B}\omega \end{bmatrix} = {}^{B}\nu = {}^{B}J(\Theta)\dot{\Theta} \tag{5-68}$$

我们关心的是给出雅可比矩阵在另一个坐标系{A}中的表达式。首先，注意到已知坐标系{B}中的6 × 1笛卡儿速度矢量可以通过如下变换得到相对于坐标系{A}的表达式

$$\begin{bmatrix} {}^{A}v \\ {}^{A}\omega \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} {}^{A}_{B}R & 0 \\ \hline 0 & {}^{A}_{B}R \end{array}\right] \begin{bmatrix} {}^{B}v \\ {}^{B}\omega \end{bmatrix} \tag{5-69}$$

因此，可以得到

$$\begin{bmatrix} {}^{A}v \\ {}^{A}\omega \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} {}^{A}_{B}R & 0 \\ \hline 0 & {}^{A}_{B}R \end{array}\right] {}^{B}J(\Theta)\dot{\Theta} \tag{5-70}$$

显然，利用下列关系式可以完成雅可比矩阵参考坐标系的变换:

$${}^{A}J(\Theta) = \left[\begin{array}{c|c} {}^{A}_{B}R & 0 \\ \hline 0 & {}^{A}_{B}R \end{array}\right] {}^{B}J(\Theta) \tag{5-71}$$

5.8 奇异性

已知一个线性变换可以将关节速度和笛卡儿速度联系起来，那么自然会提出一个问题:这个线性变换矩阵是可逆的吗？也就是说，这个矩阵是非奇异的吗？如果这个矩阵是非奇异的，那么已知笛卡儿速度的话，就可以对该矩阵求逆计算出关节的速度:

$$\dot{\Theta} = J^{-1}(\Theta)\nu \tag{5-72}$$

这是一个重要的关系式。例如，要求机器人手部在笛卡儿空间以某个速度矢量运动。应用式(5-72)，可以计算出沿着这个路径每一瞬时所需的关节速度。这样，雅可比矩阵可逆性的实质问题就在于：雅可比矩阵对于所有的Θ值都是可逆的吗？如果不是，在什么位置不可逆？

大多数操作臂都有使得雅可比矩阵出现奇异的Θ值。这些位置就称为**机构的奇异位形**或简称**奇异状态**。所有操作臂在工作空间的边界都存在奇异位形，并且大多数操作臂在它们的工作空间内也有奇异位形。对奇异位形分类的深入研究已超出本书讨论范围，更多的相关内容可以参见文献[5]。在本书中，我们没有给出奇异性的严格定义，而是大致将它们分为两类:

1. **工作空间边界的奇异位形**出现在操作臂完全展开或者收回使得末端执行器处于或非常接近工作空间边界的情况。 151

2. **工作空间内部的奇异位形**出现在远离工作空间的边界，通常是由于两个或两个以上的

关节轴线共线引起的。

当一个操作臂处于奇异位形时，它会失去一个或多个自由度（在笛卡儿空间中观察）。这也就是说，在笛卡儿空间的某个方向上（或某个子空间中），无论选择什么样的关节速度，都不能使机器人手臂运动。显然，这种情况也会在机器人的工作空间边界发生。

例5.4

对于例5.3所示的简单两连杆操作臂，奇异位形在什么位置？奇异位形的物理意义是什么？它们是工作空间边界的奇异位形还是工作空间内部的奇异位形？

为了求出机构的奇异点，必须首先计算机构的雅可比矩阵行列式的值。在行列式的值为0的位置，雅可比矩阵非满秩，也就是奇异的：

$$DET[J(\Theta)] = \begin{bmatrix} l_1 s_2 & 0 \\ l_1 c_2 + l_2 & l_2 \end{bmatrix} = l_1 l_2 s_2 = 0 \tag{5-73}$$

显然，当θ_2为0或者180°时，机构处于奇异位形。从物理意义上讲，当θ_2=0时，操作臂完全展开。处于这种位形时，末端执行器仅可以沿着笛卡儿坐标的某个方向（垂直于手臂方向）运动。因此，操作臂失去了一个自由度。同样，当θ_2=180°时，操作臂完全收回时，手臂也只能沿着一个方向运动，而不能在两个方向运动。由于这类奇异位形处于操作臂工作空间的边界上，因此将它们称为工作空间边界的奇异位形。注意，无论对于坐标系{0}还是其他坐标系，雅可比矩阵都是相同的。

在机器人控制系统中应用式（5-72）的危险在于，在奇异位形，雅可比矩阵的逆不存在！当操作臂接近奇异点位置时，关节速度会趋向于无穷大。

例5.5

如图5-10所示，对于例5.3中的两连杆机器人，末端执行器沿着 $\hat{X}$ 轴以1.0m/s的速度运动。当操作臂远离奇异位形时，关节速度都在允许范围内。但是当θ_2=0时，操作臂接近奇异位形，此时关节速度趋向于无穷大。

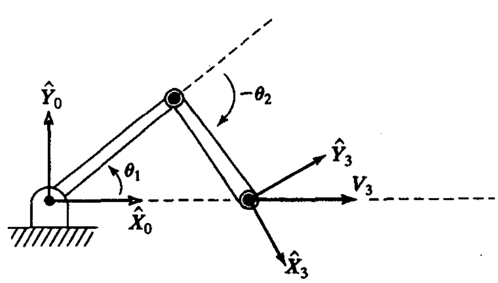


图5-10 末端以恒定的线速度运动的两连杆操作臂

首先计算坐标系{0}中雅可比矩阵的逆：

152

$${}^0J^{-1}(\Theta) = \frac{1}{l_1 l_2 s_2}\begin{bmatrix} l_2 c_{12} & l_2 s_{12} \\ -l_1 c_1 - l_2 c_{12} & -l_1 s_1 - l_2 s_{12} \end{bmatrix} \tag{5-74}$$

然后，当末端执行器以1m/s的速度沿 $\hat{X}$ 方向运动时，应用式（5-74），按照操作臂位形的函数

计算出关节速度:

$$\dot{\theta}_1 = \frac{c_{12}}{l_1 s_2}$$
$$\dot{\theta}_2 = -\frac{c_1}{l_2 s_2} - \frac{c_{12}}{l_1 s_2} \qquad (5\text{-}75)$$

显然，当操作臂伸展到接近于θ_2=0时，两个关节的速度都趋向于无穷大。

■

例5.6

对于PUMA560操作臂，给出两个可能出现的奇异位形的位置。

当θ_3接近于－90deg时，存在一个奇异位形，作为练习，请读者计算出θ_3的精确值。（见习题5.14）在这种情况下，连杆2和连杆3完全展开，这与例5.3的两连杆操作臂处于奇异位形的情况相同。这种情况属于工作空间边界的奇异位形。

只要θ_5=0.0deg，操作臂都会处于奇异位形。在这个位形，关节轴4和关节轴6成一直线，所以这两个关节轴的动作都会使末端执行器产生相同的运动，因此操作臂就好像失去了一个自由度。由于这个奇异位形出现在工作空间内部，所以它属于工作空间内部的奇异位形。

■

5.9 作用在操作臂上的静力

操作臂的链式结构特性自然让我们想到力和力矩是如何从一个连杆向下一个连杆传递的。考虑操作臂的自由末端（末端执行器）在工作空间推动某个物体，或用手部抓举着某个负载的典型情况。我们希望求出保持系统静态平衡的关节扭矩。

对于操作臂的静力，首先锁定所有的关节以使操作臂的结构固定。然后对这种结构中的连杆进行讨论，写出力和力矩对于各连杆坐标系的平衡关系。最后，为了保持操作臂的静态平衡，计算出需要对各关节轴依次施加多大的静力矩。通过这种方法，可以求出为了使末端执行器支承住某个静负载所需的一组关节力矩。 153

在本节中，不考虑作用在连杆上的重力（这将留到第6章中讨论）。我们所讨论的关节静力和静力矩是由施加在最后一个连杆上的静力或静力矩（或两者共同）引起的，例如，当操作臂的末端执行器和环境接触时就是这样的。

我们为相邻杆件所施加的力和力矩定义以下特殊的符号:

f_i =连杆$i-1$施加在连杆i上的力，

n_i =连杆$i-1$施加在连杆i上的力矩。

我们按照惯例建立连杆坐标系。图5-11所示为施加在连杆i上的静力和静力矩（除了重力以外）。将这些力相加并令其和为0，有

$$^{i}f_i - {}^{i}f_{i+1} = 0 \qquad (5\text{-}76)$$

将绕坐标系$\{i\}$原点的力矩相加，有

$$^{i}n_i - {}^{i}n_{i+1} - {}^{i}P_{i+1} \times {}^{i}f_{i+1} = 0 \qquad (5\text{-}77)$$

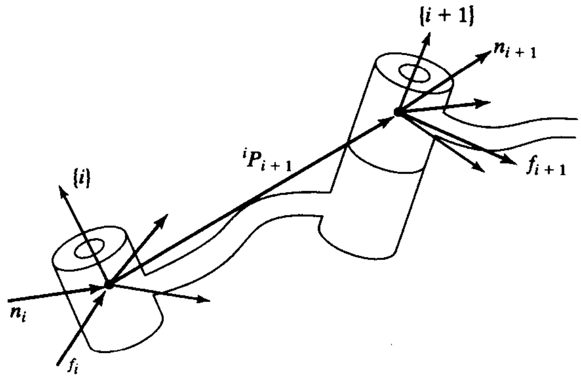


图5-11 单连杆的静力和静力矩平衡关系

如果我们从施加于手部的力和力矩的描述开始，从末端连杆到基座（连杆0）进行计算就可以计算出作用于每一个连杆上的力和力矩，为此，对式（5-76）和式（5-77）进行整理，以便从高序号连杆向低序号连杆进行迭代求解。结果如下

$$^{i}f_i={}^{i}f_{i+1} \tag{5-78}$$

$$^{i}n_i={}^{i}n_{i+1}+{}^{i}P_{i+1}\times{}^{i}f_{i+1} \tag{5-79}$$

154 为了按照定义在连杆本体坐标系中的力和力矩写出这些表达式，用坐标系{i+1}相对于坐标系{i}描述的旋转矩阵进行变换，就得到了最重要的连杆之间的静力“传递”表达式：

$$^{i}f_i={}^{i}_{i+1}R\,^{i+1}f_{i+1} \tag{5-80}$$

$$^{i}n_i={}^{i}_{i+1}R\,^{i+1}n_{i+1}+{}^{i}P_{i+1}\times{}^{i}f_i \tag{5-81}$$

最后，提出了一个重要的问题：为了平衡施加在连杆上的力和力矩，需要在关节上施加多大的力矩？除了绕关节轴的力矩外，力和力矩矢量的所有分量都可以由操作臂机构本身来平衡。因此，为了求出保持系统静平衡所需的关节力矩，应计算关节轴矢量和施加在连杆上的力矩矢量的点积：

$$\tau_i={}^{i}n_i^{T}\,{}^{i}\hat{Z}_i \tag{5-82}$$

对于关节i是移动关节的情况，可以计算出关节驱动力为

$$\tau_i={}^{i}f_i^{T}\,{}^{i}\hat{Z}_i \tag{5-83}$$

注意，即使对于线性的关节力，我们也使用符号τ。

按照惯例，通常将使关节角增大的旋转方向定义为关节力矩的正方向。

式（5-80）到式（5-83）给出一种方法，可以计算静态下用操作臂末端执行器施加力和力矩所需的关节力。

例5.7

例5.3的两连杆操作臂，在末端执行器施加作用力矢量^{3}F（可以认为该力是作用在坐标系

155 {3}原点的上）。按照位形函数和作用力的函数给出所需关节力矩（参见图5-12）。

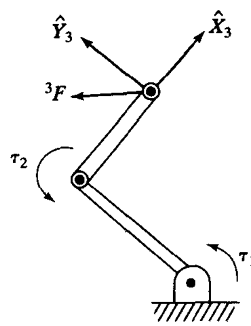


图 5-12

应用式（5-80）~式（5-82），从末端连杆开始向机器人的基座计算：

$$^2f_2=\begin{bmatrix}f_x\\f_y\\0\end{bmatrix} \tag{5-84}$$

$$^2n_2=l_2\hat{X}_2\times\begin{bmatrix}f_x\\f_y\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\l_2f_y\end{bmatrix} \tag{5-85}$$

$$^1f_1=\begin{bmatrix}c_2&-s_2&0\\s_2&c_2&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_x\\f_y\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_2f_x-s_2f_y\\s_2f_x+c_2f_y\\0\end{bmatrix} \tag{5-86}$$

$$^1n_1=\begin{bmatrix}0\\0\\l_2f_y\end{bmatrix}+l_1\hat{X}_1\times{}^1f_1=\begin{bmatrix}0\\0\\l_1s_2f_x+l_1c_2f_y+l_2f_y\end{bmatrix} \tag{5-87}$$

于是有

$$\tau_1=l_1s_2f_x+(l_2+l_1c_2)f_y \tag{5-88}$$

$$\tau_2=l_2f_y \tag{5-89}$$

可将这个关系写成矩阵算子：

$$\tau=\begin{bmatrix}l_1s_2&l_2+l_1c_2\\0&l_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_x\\f_y\end{bmatrix} \tag{5-90}$$

这个矩阵是式（5-66）中求出的雅可比矩阵的转置，但这并不是巧合！

■

5.10 力域中的雅可比

在静态下，可知关节力矩完全与在手部上的力平衡。当力作用在机构上时，如果机构有一个位移，就作了功（从技术意义上讲）。功被定义为作用力通过一段距离，它是以能量为单

位的标量。如令位移趋向于无穷小就可以用**虚功**原理来描述静止的情况。功具有能量的单位，所以它在任何广义坐标系下的测量值都相同。特别是在笛卡儿空间作的功应当等于关节空间作的功。在多维空间，功是一个力或力矩矢量与位移矢量的点积。于是有

$$\mathcal{F}\cdot\delta\chi=\tau\cdot\delta\Theta \tag{5-91}$$

156 式中 $\mathcal{F}$ 是一个作用在末端执行器上的6×1维笛卡儿力-力矩矢量，$\delta\chi$ 是末端执行器的6×1维无穷小笛卡儿位移矢量，τ是6×1维关节力矩矢量，$\delta\Theta$ 是6×1维无穷小的关节位移矢量。式(5-91)也可写成

$$\mathcal{F}^T\delta\chi=\tau^T\delta\Theta \tag{5-92}$$

雅可比矩阵的定义为

$$\delta\chi=J\delta\Theta \tag{5-93}$$

因此可写出

$$\mathcal{F}^TJ\delta\theta=\tau^T\delta\Theta \tag{5-94}$$

对所有的$\delta\Theta$，上式均成立，因此有

$$\mathcal{F}^TJ=\tau^T \tag{5-95}$$

对上式两边转置，可得：

$$\tau=J^T\mathcal{F} \tag{5-96}$$

式(5-96)从一般意义上证明了例5.6中两连杆操作臂的特殊情况：雅可比的转置将作用在手臂上的笛卡儿力映射成了等效关节力矩。当得到相对于坐标系{0}的雅可比矩阵后，可以由下式对坐标系{0}中的力矢量进行变换：

$$\tau={}^0J^T\,{}^0\mathcal{F} \tag{5-97}$$

当雅可比矩阵不满秩时，存在某些特定的方向，末端执行器在这些方向上不能施加期望的静态力。即，如果式(5-97)中的雅可比矩阵奇异，$\mathcal{F}$ 在某些方向（这些方向定义了雅可比矩阵的零空间[6]）上的增大或减小与所求τ的值无关。这也意味着，在奇异位形附近，机械效益趋向于无穷大，以致只要很小的关节力矩就可在末端执行器产生很大的力。⊖ 因此，在力域中和在位置域中奇异性都是存在的。

注意，式(5-97)是一个非常有趣的关系式，它可将一个笛卡儿空间的量变换为一个关节空间的量而无需计算任何运动学函数的逆解。在后面章节中讨论控制问题时将利用这个关系。

5.11 速度和静力的笛卡儿变换

可以根据6×1维的刚体广义速度表达式进行讨论：

$$\nu=\begin{bmatrix}v\\ \omega\end{bmatrix} \tag{5-98}$$

同样，考虑6×1维的广义力矢量表达式，即

⊖ 假设一个两连杆平面操作臂的末端执行器在与某表面接触时几乎完全伸展。在此种位形下，“很小”的力矩可以产生任意大的力。

$$\mathcal{F}=\begin{bmatrix} F \\ N \end{bmatrix} \tag{5-99}$$ 157

式中F是一个3 × 1力矢量，N是一个3 × 1的力矩矢量。很自然地可以想到用6 × 6变换阵将这些量从一个坐标系映射到另一个坐标系。这些工作已在连杆之间速度和力的传递的讨论中做过。这里，用矩阵算子的形式写出式（5-45）和式（5-47），将坐标系$\{A\}$中的广义速度矢量变换为在坐标系$\{B\}$中的描述。

这里涉及的两个坐标系之间的连接是刚性的，所以在推导关系式时式（5-45）中出现的$\dot{\theta}_{i+1}$被置成零

$$\begin{bmatrix} {}^{B}v_{B} \\ {}^{B}\omega_{B} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} {}^{B}_{A}R & -{}^{B}_{A}R\,{}^{A}P_{BORG}\times \\ 0 & {}^{B}_{A}R \end{bmatrix}\begin{bmatrix} {}^{A}v_{A} \\ {}^{A}\omega_{A} \end{bmatrix} \tag{5-100}$$

式中，叉乘可看成是矩阵算子

$$P\times=\begin{bmatrix} 0 & -p_x & p_y \\ p_x & 0 & -p_x \\ -p_y & p_x & 0 \end{bmatrix} \tag{5-101}$$

现在，式（5-100）将一个坐标系的速度与另一个坐标系的速度联系起来，因此这个6 × 6算子被称为**速度变换矩阵**，用符号T_v表示。在这种情况中，它是一个将$\{A\}$中的速度映射到$\{B\}$中的速度的速度变换，所以可用下列表达式将式（5-100）表示成紧凑的形式:

$${}^{B}v_{B}={}^{B}_{A}T_{v}\,{}^{A}v_{A} \tag{5-102}$$

已知$\{B\}$中的速度值，为了计算在$\{A\}$中的速度描述，可以对式（5-100）求逆:

$$\begin{bmatrix} {}^{A}v_{A} \\ {}^{A}\omega_{A} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} {}^{A}_{B}R & {}^{A}P_{BORG}\times{}^{A}_{B}R \\ 0 & {}^{A}_{B}R \end{bmatrix}\begin{bmatrix} {}^{B}v_{B} \\ {}^{B}\omega_{B} \end{bmatrix} \tag{5-103}$$

即

$${}^{A}v_{A}={}^{A}_{B}T_{v}\,{}^{B}v_{B} \tag{5-104}$$

注意从坐标系到坐标系的速度变换是由${}^{A}_{B}T$确定的（或它的逆变换），并且应被看作是瞬时结果，除非两个坐标系之间的关系是静止不变的。同样，由式（5-80）和式（5-81）可得6 × 6的矩阵，它可将在坐标系$\{B\}$中描述的广义力矢量变换成在坐标系$\{A\}$中的描述，即为

$$\begin{bmatrix} {}^{A}F_{A} \\ {}^{A}N_{A} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} {}^{A}_{B}R & 0 \\ {}^{A}P_{BORG}\times{}^{A}_{B}R & {}^{A}_{B}R \end{bmatrix}\begin{bmatrix} {}^{B}F_{B} \\ {}^{B}N_{B} \end{bmatrix} \tag{5-105}$$

可以写成紧凑形式

$${}^{A}\mathcal{F}_{A}={}^{A}_{B}T_{f}\,{}^{B}\mathcal{F}_{B} \tag{5-106}$$

式中T_f用来表示一个**力－力矩变换**。 158

速度和力变换矩阵与雅可比矩阵相似，可把不同坐标系中的速度和力联系起来。参照雅可比矩阵，有

$${}^{A}_{B}T_{f}={}^{A}_{B}T_{v}^{T} \tag{5-107}$$

可通过式（5-105）和式（5-103）对上式进行检验。

例5.8

图5-13所示为一个持有工具的末端执行器。在固连在操作臂上的末端执行器上安装了一个腕力传感器。这个装置能够测量施加在它上面的力和力矩。

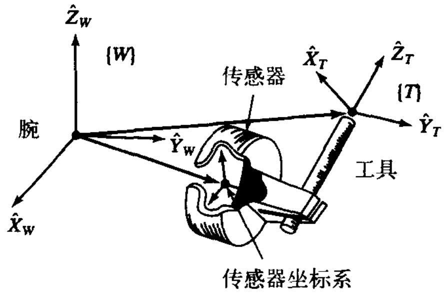


图5-13 带有力传感器的坐标系

假设传感器的输出为6×1的矢量${}^{S}\mathcal{F}$，它由传感器坐标系$\{S\}$中表示的三个力和三个力矩组成。我们真正感兴趣的是要知道施加在工具末端的力和力矩${}^{T}\mathcal{F}$。求出从$\{S\}$到工具坐标系$\{T\}$的6×6力－力矩矢量的变换矩阵。已知从$\{T\}$到$\{S\}$的变换${}^{T}_{S}T$。（注意，这里的$\{S\}$是传感器坐标系，而不是工作台坐标系。）

这是式（5-106）的简单应用。首先，从${}^{S}_{T}T$求出逆${}^{T}_{S}T$。${}^{T}_{S}T$由${}^{T}_{S}R$和${}^{T}P_{SORG}$组成。然后应用式（5-106）得到

$$ {}^{T}\mathcal{F}_{T} = {}^{T}_{S}T_{f}\,{}^{S}\mathcal{F}_{S} \qquad (5\text{-}108)$$

式中

$$ {}^{T}_{S}T_{f} = \begin{bmatrix} {}^{T}_{S}R & 0 \\ {}^{T}P_{SORG}\times{}^{T}_{S}R & {}^{T}_{S}R \end{bmatrix} \qquad (5\text{-}109)$$

■

参考文献

[1] K. Hunt, *Kinematic Geometry of Mechanisms*, Oxford University Press, New York, 1978.

159 [2] K.R. Symon, *Mechanics*, 3rd edition, Addison-Wesley, Reading, MA, 1971.

[3] I. Shames, *Engineering Mechanics*, 2nd edition, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1967.

[4] D. Orin and W. Schrader, "Efficient Jacobian Determination for Robot Manipulators," in *Robotics Research: The First International Symposium*, M. Brady and R.P. Paul, Editors, MIT Press, Cambridge, MA, 1984.

[5] B. Gorla and M. Renaud, *Robots Manipulateurs*, Cepadues-Editions, Toulouse, 1984.

[6] B. Noble, *Applied Linear Algebra*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1969.

[7] J.K. Salisbury and J. Craig, "Articulated Hands: Kinematic and Force Control Issues," *International Journal of Robotics Research*, Vol. 1, No. 1, Spring 1982.

[8] C. Wampler, "Wrist Singularities: Theory and Practice," in *The Robotics Review 2*, O. Khatib, J. Craig, and T. Lozano-Perez, Editors, MIT Press, Cambridge, MA, 1992.

[9] D.E. Whitney, "Resolved Motion Rate Control of Manipulators and Human Prostheses," *IEEE Transactions on Man-Machine Systems*, 1969.

习题

5.1 [10] 用在坐标系{0}中表达的雅可比矩阵重做例5.3。是否和例5.3的结果一致？

5.2 [25] 求出第3章习题3中的3自由度操作臂雅可比矩阵。在坐标系{4}中写出此矩阵，坐标系{4}位于手部末端且与坐标系{3}的方位相同。

5.3 [35] 求出第3章习题3中的3自由度操作臂雅可比矩阵。在坐标系{4}中写出此矩阵，坐标系{4}位于手部末端且与坐标系{3}的方位相同。用3种不同的方法推导雅可比矩阵：从基座到末端的速度传递；从末端到基座的静力传递；直接对运动学方程的微分。

5.4 [8] 证明在力域中的奇异位形与在位置域中的奇异位形相同。

5.5 [39] 计算PUMA560在坐标系{6}中的雅可比矩阵。

5.6 [47] 任何具有3个旋转关节且连杆长度非零的机构在其工作空间内一定有一条奇异点轨迹的说法是否正确？

5.7 [7] 画出一个3自由度机构的简图，它的线速度雅可比矩阵在操作臂所有位形下是3 × 3的单位矩阵。用一两句话描述运动学解。

5.8 [18] 一般机构有时存在某些特定的位形，称作“各向同性点”，这时雅可比矩阵的各列正交且模相同[7]。对于例5.3的两连杆操作臂，求出存在的各向同性点。提示：对l_1，l_2有什么要求？

5.9 [50] 求出一般6自由度操作臂中存在各向同性点的必要条件。（见习题5.8）

5.10 [7] 对于例5.2的两连杆操作臂，求出将关节力矩变换成手部的2 × 1力矢量^3F的变换矩阵。

5.11 [14] 已知

$$
{}^A_BT=\begin{bmatrix}0.866 & -0.500 & 0.000 & 10.0\\ 0.500 & 0.866 & 0.000 & 0.0\\ 0.000 & 0.000 & 1.000 & 5.0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}
$$

160

如果在坐标系{A}原点的速度矢量是

$$
{}^A\nu=\begin{bmatrix}0.0\\ 2.0\\ -3.0\\ 1.414\\ 1.414\\ 0.0\end{bmatrix}
$$

求出以坐标系{B}的原点为参考点的6 × 1速度矢量。

5.12 [15] 对于习题3.3的三连杆操作臂，求与操作臂在工作空间边界上的奇异位形对应的一组关节角以及与操作臂在工作空间内部的奇异位形对应的另一组关节角。

5.13 [9] 某两连杆操作臂的雅可比矩阵为：

$$
{}^0J(\Theta)=\begin{bmatrix}-l_1s_1-l_2s_{12} & -l_2s_{12}\\ l_1c_1+l_2c_{12} & l_2c_{12}\end{bmatrix}
$$

不计重力，求出使操作臂产生静力矢量 ${}^0F=10\hat{X}_0$ 的关节力矩。

5.14 [18] 如果PUMA560的连杆参数a_3为0，则当$\theta_3=-90.0°$时会出现工作空间边界奇异。求出当奇异发生时，θ_3的表达式。并证明如果a_3为0时，结果为$\theta_3=-90.0°$。提示：在此位形下，一条直线穿过关节轴2和3，及轴4，5和6 的交点。

5.15 [24]根据第3章例3.4操作臂的三个关节速率计算工具末端的线速度，求出3 × 3雅可比矩阵。求出坐标系{0}的雅可比矩阵。

5.16 [20] 一个用Z-Y-Z欧拉角描述的3R操作臂（即，用式（2.72）给出的正向运动学解，且$\alpha=\theta_1$, $\beta=\theta_2$, $\gamma=\theta_3$），求出联系关节速度和末端连杆角速度的雅可比矩阵。

5.17 [31]假设一般6自由度机器人，对所有的i已知 ${}^0\hat{Z}_i$ 和 ${}^0P_{iorg}$ ——即，已知各连杆坐标系矢量Z在基坐标系下的单位，并且已知各个连杆坐标系的原点在基坐标系下的位置。给出我们关心的工具点（相对于连杆n固定）的速度，并且 ${}^0P_{tool}$ 已知。现在，对于旋转关节，由关节i的速度引起的工具末端的速度为

$$ {}^0v_i=\dot{\theta}_i\,{}^0\hat{Z}_i\times({}^0P_{tool}-{}^0P_{iorg}) \tag{5-110}$$

并且由此关节的速度引起的连杆n的角速度为

$$ {}^0\omega_i=\dot{\theta}_i\,{}^0\hat{Z}_i \tag{5-111}$$

分别对 ${}^0v_i$ 和 ${}^0\omega_i$ 求和可得出工具端的全部线速度和角速度。仿照式（5-110）和式（5-111），求出对于移动关节i的表达式，且根据 $\hat{Z}_i, P_{iorg}, P_{tool}$ 写出一个任意的6自由度操作臂的6 × 6雅可比矩阵。

5.18 [18] 已知一个3R机器人的运动学解为

$$ {}^0_3T=\begin{bmatrix} c_1c_{23} & -c_1s_{23} & s_1 & l_1c_1+l_2c_1c_2 \\ s_1c_{23} & -s_1s_{23} & -c_1 & l_1s_1+l_2s_1c_2 \\ s_{23} & c_{23} & 0 & l_2s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

161

求 ${}^0J(\Theta)$，将其乘以关节速度矢量，求坐标系{3}的原点相对于坐标系{0}的线速度。

5.19 [15] 一个RP操作臂，连杆2的原点位置为

$$ {}^0P_{2ORG}=\begin{bmatrix} a_1c_1-d_2s_1 \\ a_1s_1+d_2c_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

求出将两个关节速率和坐标系{2}原点的线速度联系起来的2 × 2雅可比矩阵。求出使操作臂处于奇异位形的Θ值。

5.20 [15] 解释这句话的含义：“一个处于奇异位形的n个自由度操作臂可以看作是一个处于$n-1$维空间的冗余操作臂。”

编程习题

1. 有两个相对固定的坐标系$\{A\}$和$\{B\}$——即 ${}^A_BT$ 是不变的。在平面运动情况下，定义坐标系$\{A\}$的速度为

$$
{}^{A}v_{A}=\begin{bmatrix}{}^{A}\dot{x}_{A}\\ {}^{A}\dot{y}_{A}\\ {}^{A}\dot{\theta}_{A}\end{bmatrix}
$$

写出一个子程序，已知 ${}^{A}_{B}T$ 和 ${}^{A}v_{A}$，计算 ${}^{B}v_{B}$。提示：此平面机构与式（5-100）类似。应用程序引导语句如下（与C语言相似）：

```
Procedure Veltrans (VAR brela: frame; VAR vrela, vrelb: vec3);
```

式中“vrela”是相对于坐标系$\{A\}$的速度 ${}^{A}v_{A}$，并且“vrelb”是子程序的输出（相对于坐标系$\{B\}$的速度即 ${}^{B}v_{B}$ ）。

2. 求三连杆平面操作臂的3 × 3雅可比矩阵（见例3.3）。为推导雅可比矩阵，应进行速度传递分析（方法如同例5.2）或静力分析（方法如同例5.6）。写出雅可比矩阵的推导过程。
   编写一个子程序计算出坐标系{3}中的雅可比——即关节角度的函数${}^{3}J(\Theta)$。注意坐标系{3}为原点在关节3轴上的标准连杆坐标系。应用程序引导语句如下（与C语言相似）：

```
Procedure Jacobian (VAR theta: vec3; Var Jac: mat33);
```

   操作臂的参数为$l_2=l_2=0.5$m。

3. 对于某一任务，一个工具坐标系和一个工作台坐标系的定义如下（单位为m和deg）：

$$
{}^{W}_{T}T=[x\ y\ \theta]=[0.1\ \ 0.2\ \ 30.0]
$$

$$
{}^{B}_{S}T=[x\ y\ \theta]=[0.0\ \ 0.0\ \ 0.0]
$$

   在某一时刻，工具末端的位置为

$$
{}^{S}_{T}T=[x\ y\ \theta]=[0.6\ \ -0.3\ \ 45.0]
$$ 162

   在同一时刻，测得的关节速率（deg/s）为

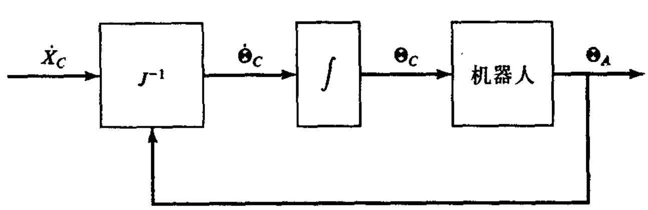
$$
\dot{\Theta}=[\dot{\theta}_1\ \dot{\theta}_2\ \dot{\theta}_3]=[20.0\ \ -10.0\ \ 12.0]
$$

   计算工具末端相对于自身坐标系的线速度和角速度，即 ${}^{T}v_{T}$。如果多于一个解，求出所有的解。

MATLAB习题

这个练习的重点是平面3自由度3R机器人（见图3-6和3-7；DH参数由图3-8给出）的雅可比矩阵及行列式、分步速度控制仿真和静力学逆解。

分步速度控制方法[9]基于操作臂速度方程 ${}^{k}\dot{X}={}^{k}J\dot{\Theta}$，式中${}^{k}J$ 是雅可比矩阵，$\dot{\Theta}$是关节相对速度矢量，${}^{k}\dot{X}$是要求的笛卡儿速度矢量（包括平移和旋转），k表示雅可比矩阵和笛卡儿速度表达式所在的坐标系。下图所示为一个分步速度控制算法仿真框图：



分步速度控制算法框图

如图中所示，分步速度控制算法计算期望的关节速率 $\dot{\Theta}_C$ 以得到期望的笛卡儿速度 $\dot{X}_C$；必须按此框图在每个仿真时步进行计算。雅可比矩阵随位形Θ_A改变。出于仿真的目的，假定期望的关节角度Θ_C总是和实际得到的关节角度Θ_A相同（在实际中很难满足）。对平面3自由度3R机器人，k=0时速度方程 ${}^k\dot{X}={}^kJ\dot{\Theta}$ 为

$$
{}^0\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \omega_z \end{Bmatrix} = {}^0\begin{bmatrix} -L_1s_1-L_2s_{12}-L_3s_{123} & -L_2s_{12}-L_3s_{123} & -L_3s_{123} \\ L_1c_1+L_2c_{12}+L_3c_{123} & L_2c_{12}+L_3c_{123} & L_3c_{123} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{Bmatrix}
$$

式中$s_{123}=\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3)$，$c_{123}=\cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3)$等等。注意 ${}^0\dot{X}$ 为手部坐标系（位于图3-6中夹持器的中心）原点相对于基坐标系{0}原点的笛卡儿速度，并用坐标系{0}的坐标表达。

目前大多数的工业机器人无法直接给出 $\dot{\Theta}_C$ 指令，所以必须首先将这些期望关节的相对速率进行积分得到期望的关节角度Θ_C，就可以在每个时步对机器人发出指令。实际上，最简单可行的积分可以完成此项工作，这里假定控制时步Δt:很小 $\Theta_{new}=\Theta_{old}+\dot{\Theta}\Delta t$ 。在MATLAB的分步速度仿真中，假定期望的Θ_{new}可被虚拟机器人全部完成（第6章和第9章中提出了动力学和
163 控制的方法，为此就无须做出这种简化假定）。一定要在完成分步速度计算之前用新的位形Θ_{new}在下一时步对雅可比矩阵更新。

写出一个MATLAB程序计算雅可比矩阵并对平面3R机器人进行分步速度控制仿真。已知机器人连杆长度L_1=4, L_2=3, L_3=2(m)；起始关节角$\Theta=\{\theta_1\ \ \theta_2\ \ \theta_3\}^T=\{10°\ \ 20°\ \ 30°\}^T$，并且恒定的期望笛卡儿速度 ${}^0\{\dot{X}\}=\{\dot{x}\ \dot{y}\ \omega_z\}^T=\{0.2\ -0.3\ -0.2\}^T$(m/s, m/s, rad/s)，仿真时间为5s，时步为dt=0.1s。在同一个程序循环中，计算静力学逆解——即计算关节力矩$T=\{\tau_1\ \ \tau_2\ \ \tau_3\}^T$(Nm)，已知恒定的期望笛卡儿力和力矩指令为 ${}^0\{W\}=\{f_x\ f_y\ m_z\}^T=\{1\ 2\ 3\}^T$(N, N, Nm)。同样，在相同的程序循环中，在屏幕上对这个机器人的每个时步进行动画显示，这样就可以观察仿真运动是否正确。

a) 对指定的数值，画出5张图（请按每组数据分别画出）：

1. 3个主动关节速率 $\dot{\Theta}=\{\dot{\theta}_1\ \dot{\theta}_2\ \dot{\theta}_3\}^T$ 与时间的关系；
2. 3个主动关节角$\Theta=\{\theta_1\ \theta_2\ \theta_3\}^T$与时间的关系；
3. ${}^0_HT$ 的3个笛卡儿分量，$X=\{x\ y\ \phi\}^T$（ϕ应使用单位rad）与时间的关系；
4. 雅可比矩阵行列式|J|与时间的关系——在分步速度仿真中对靠近奇异点的程度进行评价；
5. 3个主动关节力矩$T=\{\tau_1\ \tau_2\ \tau_3\}$与时间的关系。

在每个图中认真标出各个分量（最好用手画）；同时，标出轴的名称和单位。

b) 用Corke MATLAB Robotics工具箱检查一系列起始和终止关节角的雅可比矩阵结果。试用函数*jacob0*()。**注意**：雅可比函数工具箱适用于坐标系{3}相对于坐标系{0}的运动，
164 而不适用于由问题指定的坐标系{H}相对于坐标系{0}的运动。*jacob0*()给出了坐标系{0}中雅可比矩阵的结果；*jacobn*()将给出坐标系{3}中的结果。

第6章 操作臂动力学

6.1 概述

到目前为止，我们只研究了操作臂的运动学。我们已研究了静态位置、静态力和速度；但是，从未考虑引起运动所需的力。在本章中，将考虑操作臂的运动方程——由驱动器施加的力矩或施加在操作臂上的外力使操作臂运动。

在机构动力学领域有很多的著作。确实，对此领域需要进行多年的研究。显然，我们无法涵盖此领域的各个方面。但是，某些动力学公式似乎特别适用于操作臂。特别是利用操作臂串联结构的性质自然是我们研究的对象。

与操作臂动力学有关的两个问题有待解决。第一个问题，已知一个轨迹点Θ，$\dot{\Theta}$和$\ddot{\Theta}$，希望求出期望的关节力矩矢量τ。这个动力学公式对操作臂控制问题（第10章）很有用。第二个问题是计算在施加一组关节力矩的情况下机构如何运动。也就是，已知一个力矩矢量τ，计算出操作臂的运动Θ，$\dot{\Theta}$和$\ddot{\Theta}$。这对操作臂的仿真很有用。 165

6.2 刚体的加速度

现在分析刚体的加速度问题。在任一瞬时，对刚体的线速度和角速度进行求导，可分别得到线加速度和角加速度。即

$$^{B}\dot{V}_{Q}=\frac{d}{dt}{}^{B}V_{Q}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{^{B}V_{Q}(t+\Delta t)-{}^{B}V_{Q}(t)}{\Delta t} \tag{6-1}$$

和

$$^{A}\dot{\Omega}_{B}=\frac{d}{dt}{}^{A}\Omega_{B}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{^{A}\Omega_{B}(t+\Delta t)-{}^{A}\Omega_{B}(t)}{\Delta t} \tag{6-2}$$

同速度一样，当微分的参考坐标系为世界坐标系$\{U\}$时，可用下列符号表示刚体的速度，即:

$$\dot{v}_{A}={}^{U}\dot{V}_{AORG} \tag{6-3}$$

和

$$\dot{\omega}_{A}={}^{U}\dot{\Omega}_{A} \tag{6-4}$$

线加速度

式（5-12）描述了坐标系$\{A\}$下的速度矢量^{B}Q（这是第5章中的一个重要结论），当坐标系$\{A\}$的原点与坐标系$\{B\}$的原点重合时，速度矢量^{B}Q可表示为:

$$^{A}V_{Q}={}^{A}_{B}R\,{}^{B}V_{Q}+{}^{A}\Omega_{B}\times{}^{A}_{B}R\,{}^{B}Q \tag{6-5}$$

方程左边描述的是矢量^{A}Q随时间变化的情况。由于两个坐标系的原点重合，因此可以把式

(6-5) 改写成如下形式:

$$\frac{d}{dt}({}_B^AR^BQ)={}_B^AR^BV_Q+{}^A\Omega_B\times{}_B^AR^BQ \tag{6-6}$$

这种形式的方程在求解相应的加速度方程时很方便。

对式 (6-5) 求导，当坐标系$\{A\}$和$\{B\}$的原点重合时，可得到${}^BQ$的加速度在坐标系$\{A\}$中的表达式:

$${}^A\dot{V}_Q=\frac{d}{dt}({}_B^AR^BV_Q)+{}^A\dot{\Omega}_B\times{}_B^AR^BQ+{}^A\Omega_B\times\frac{d}{dt}({}_B^AR^BQ) \tag{6-7}$$

对上式中的第一项和最后一项应用式 (6-6)，则式 (6-7) 右边成为:

$$\begin{aligned}&{}_B^AR^B\dot{V}_Q+{}^A\Omega_B\times{}_B^AR^BV_Q+{}^A\dot{\Omega}_B\times{}_B^AR^BQ\\&+{}^A\Omega_B\times({}_B^AR^BV_Q+{}^A\Omega_B\times{}_B^AR^BQ)\end{aligned} \tag{6-8}$$

将上式中的同类项合并，整理得:

166 $${}_B^AR^B\dot{V}_Q+2{}^A\Omega_B\times{}_B^AR^BV_Q+{}^A\dot{\Omega}_B\times{}_B^AR^BQ+{}^A\Omega_B\times({}^A\Omega_B\times{}_B^AR^BQ) \tag{6-9}$$

最后，为了将结论推广到两个坐标系原点不重合的一般情况，我们附加一个表示坐标系$\{B\}$原点线加速度的项，最终得到一般表达式:

$$\begin{aligned}&{}^A\dot{V}_{BORG}+{}_B^AR^B\dot{V}_Q+2{}^A\Omega_B\times{}_B^AR^BV_Q+{}^A\dot{\Omega}_B\times{}_B^AR^BQ\\&+{}^A\Omega_B\times({}^A\Omega_B\times{}_B^AR^BQ)\end{aligned} \tag{6-10}$$

值得指出的是当${}^BQ$是常量时，即

$${}^BV_Q={}^B\dot{V}_Q=0 \tag{6-11}$$

在这种情况下，式 (6-10) 简化为:

$${}^A\dot{V}_Q={}^B\dot{V}_{BORG}+{}^A\Omega_B\times({}^A\Omega_B\times{}_B^AR^BQ)+{}^A\dot{\Omega}_B\times{}_B^AR^BQ \tag{6-12}$$

上式常用于计算旋转关节操作臂连杆的线加速度。当操作臂的连接为移动关节时，常用一般表达式 (6-10)。

角加速度

假设坐标系$\{B\}$以角速度 ${}^A\Omega_B$ 相对于坐标系$\{A\}$转动，同时坐标系$\{C\}$以角速度 ${}^B\Omega_C$ 相对于坐标系$\{B\}$转动。为求 ${}^A\Omega_C$，在坐标系$\{A\}$中进行矢量相加:

$${}^A\Omega_C={}^A\Omega_B+{}_B^AR^B\Omega_C \tag{6-13}$$

对上式求导，得

$${}^A\dot{\Omega}_C={}^A\dot{\Omega}_B+\frac{d}{dt}({}_B^AR^B\Omega_C) \tag{6-14}$$

将式 (6-6) 代入上式右侧最后一项中，得

$${}^A\dot{\Omega}_C={}^A\dot{\Omega}_B+{}_B^AR^B\dot{\Omega}_C+{}^A\Omega_B\times{}_B^AR^B\Omega_C \tag{6-15}$$

上式用于计算操作臂连杆的角加速度。

6.3 质量分布

在单自由度系统中，常常要考虑刚体的质量。对于定轴转动的情况，经常用到惯量矩这个概念。对一个可以在三维空间自由运动的刚体来说，可能存在无穷个旋转轴。在一个刚体绕任意轴作旋转运动时，我们需要一种能够表征刚体质量分布的方法。在这里，我们引入**惯性张量**，它可以被看作是对一个物体惯量的广义度量。

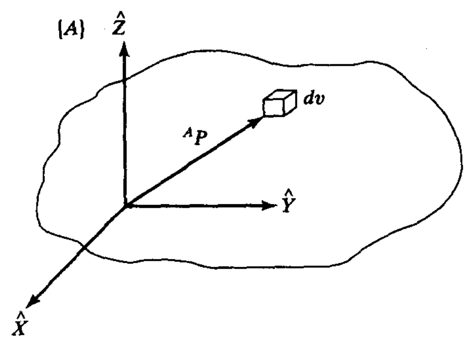


图6-1 描述物体质量分布的惯性张量，这里 ^AP 表示单元体dv 的位置矢量

现在我们定义一组参量，给出刚体质量在参考坐标系中分布的信息。图6-1表示一个刚体，坐标系建立在刚体上。惯性张量可以在任何坐标系中定义，但一般在固连于刚体上的坐标系中定义惯性张量。这里，重要的是用左上标表明已知惯性张量所在的参考坐标系。坐标系$\{A\}$中的惯性张量可用3 × 3矩阵表示如下

$$^AI=\begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \tag{6-16}$$

矩阵中的各元素为

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \iiint_V (y^2+z^2)\rho dv \\ I_{yy} &= \iiint_V (x^2+z^2)\rho dv \\ I_{zz} &= \iiint_V (x^2+y^2)\rho dv \\ I_{xy} &= \iiint_V xy\rho dv \\ I_{xz} &= \iiint_V xz\rho dv \\ I_{yz} &= \iiint_V yz\rho dv \end{aligned} \tag{6-17}$$

式中刚体由单元体dv组成，单元体的密度为ρ。每个单元体的位置由矢量 $^AP=[xyz]^T$ 确定，如图6-1所示。

I_{xx}，I_{yy}和I_{zz}称为**惯量矩**。它们是单元体质量ρdv乘以单元体到相应转轴垂直距离的平方在整个刚体上的积分。其余三个交叉项称为**惯量积**。对于一个刚体来说，这六个相互独立的参量取决于所在坐标系的位姿。当任意选择坐标系的方位时，可能会使刚体的惯量积为零。此时，参考坐标系的轴被称为**主轴**，而相应的惯量矩被称为**主惯量矩**。 167~168

例6.1

求图6-2所示坐标系中长方体的惯性张量。已知长方体密度均匀，其大小为ρ。

解：首先，计算惯量矩I_{xx}。已知体积单元$dv=dxdydz$，故：

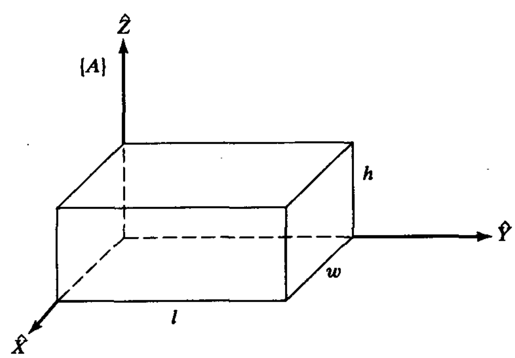
$$
\begin{aligned}
I_{xx} &= \int_0^h \int_0^l \int_0^\omega (y^2+z^2)\,\rho\,dx\,dy\,dz \\
&= \int_0^h \int_0^l (y^2+z^2)\,\omega\rho\,dy\,dz \\
&= \int_0^h \left(\frac{l^3}{3}+z^2 l\right)\omega\rho\,dz \\
&= \left(\frac{hl^3\omega}{3}+\frac{h^3 l\omega}{3}\right)\rho \\
&= \frac{m}{3}(l^2+h^2)
\end{aligned} \tag{6-18}
$$

式中m是刚体的总质量。同理可得I_{yy}和I_{zz}:

$$I_{yy}=\frac{m}{3}(\omega^2+h^2) \tag{6-19}$$

和

$$I_{zz}=\frac{m}{3}(l^2+\omega^2) \tag{6-20}$$



169 图6-2 均匀密度的刚体

然后计算I_{xy}:

$$
\begin{aligned}
I_{xy} &= \int_0^h \int_0^l \int_0^\omega x\,y\,\rho\,dx\,dy\,dz \\
&= \int_0^h \int_0^1 \frac{\omega^2}{2}\,y\,\rho\,dy\,dz \\
&= \int_0^h \frac{\omega^2 l^2}{4}\,\rho\,dz \\
&= \frac{m}{4}\omega l
\end{aligned} \tag{6-21}
$$

同理可得

$$I_{xz}=\frac{m}{4}h\omega \tag{6-22}$$

和

$$I_{yz}=\frac{m}{4}hl \tag{6-23}$$

因此，图示物体的惯性张量为

$$^{A}I=\begin{bmatrix}\frac{m}{3}(l^2+h^2) & -\frac{m}{4}\omega l & -\frac{m}{4}h\omega \\ -\frac{m}{4}\omega l & \frac{m}{3}(\omega^2+h^2) & -\frac{m}{4}hl \\ -\frac{m}{4}h\omega & -\frac{m}{4}hl & \frac{m}{3}(l^2+\omega^2)\end{bmatrix} \tag{6-24}$$

■

可看出，惯性张量是坐标系位姿的函数。众所周知的**平行移轴定理**就是在参考坐标系平移时惯性张量如何变化的计算方法。平行移轴定理描述了一个以刚体质心为原点的坐标系平移到另一个坐标系时惯性张量的变换关系。假设$\{C\}$是以刚体质心为原点的坐标系，$\{A\}$为任意平移后的坐标系，则平行移轴定理可以表示为[1]

$$\begin{aligned}{}^{A}I_{zz}&={}^{C}I_{zz}+m(x_c^2+y_c^2)\\ {}^{A}I_{xy}&={}^{C}I_{xy}-mx_cy_c\end{aligned} \tag{6-25}$$

式中矢量$P_c=[x_c\ y_c\ z_c]^T$表示刚体质心在坐标系$\{A\}$中的位置。其余的惯量矩和惯量积都可以通过式（6-25）交换x，y和z的顺序计算而得。平行移轴定理又可以表示成为矢量−矩阵形式

$$^{A}I={}^{C}I+m(P_c^TP_cI_3-P_cP_c^T) \tag{6-26}$$

式中I_3是3×3单位矩阵。

例6.2

求例6.1中所示刚体的惯性张量。已知，坐标系原点在刚体的质心。 170

解：利用平行移轴定理式（6-25），这里

$$\begin{bmatrix}x_c\\y_c\\z_c\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\omega\\l\\h\end{bmatrix}$$

因而得

$$\begin{aligned}{}^{C}I_{zz}&=\frac{m}{12}(\omega^2+l^2)\\ {}^{C}I_{xy}&=0\end{aligned} \tag{6-27}$$

其他参量可以由对称性得出。故在以质心为原点的坐标系中，所求刚体的惯性张量为

$$^{C}I=\begin{bmatrix}\frac{m}{12}(h^2+l^2) & 0 & 0\\ 0 & \frac{m}{12}(\omega^2+h^2) & 0\\ 0 & 0 & \frac{m}{12}(l^2+\omega^2)\end{bmatrix} \tag{6-28}$$

从这个结果可以看出所得矩阵为对角矩阵，因而坐标系{C}的坐标轴为刚体的主轴。

惯性张量还有其他一些性质:

1. 如果由坐标系的两个坐标轴构成的平面为刚体质量分布的对称平面，则正交于这个对称平面的坐标轴与另一个坐标轴的惯量积为零。

2. 惯量矩永远是正值，而惯量积则可能是正值或负值。

3. 不论参考坐标系方位如何变化，三个惯量矩的和保持不变。

4. 惯性张量的特征值为刚体的主惯量矩，相应的特征矢量为主轴。

大多数操作臂连杆的几何形状及结构组成都比较复杂，因而很难直接应用式（6-17）来进行求解。一般是使用测量装置（例如惯量摆）来测量每个连杆的惯量矩，而不是通过计算求得。

6.4 牛顿方程和欧拉方程

我们把组成操作臂的连杆都看作是刚体。如果知道了连杆质心的位置和惯性张量，那么它的质量分布特征就完全确定了。要使连杆运动，必须对连杆进行加速和减速。连杆运动所需的力是关于连杆期望加速度及其质量分布的函数。牛顿方程以及描述旋转运动的欧拉方程
171 描述了力、惯量和加速度之间的关系。

牛顿方程

图6-3所示的的刚体质心正以加速度 $\dot{v}_C$ 作加速运动。此时，由牛顿方程可得作用在质心上的力F引起刚体的加速度为

$$F = m\dot{v}_C \tag{6-29}$$

式中m代表刚体的总质量。

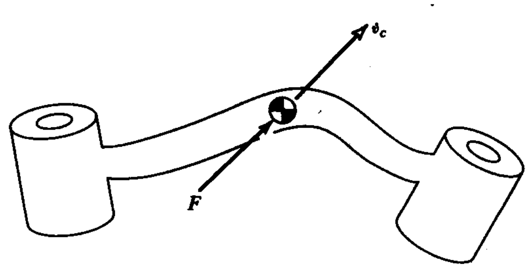


图6-3 作用于刚体质心的力F引起刚体加速度 $\dot{v}_C$

欧拉方程

图6-4所示为一个旋转刚体，其角速度和角加速度分别为ω、$\dot{\omega}$。此时，由欧拉方程可得作用在刚体上的力矩N引起刚体的转动为

$$N={}^{C}I\dot{\omega}+\omega\times{}^{C}I\omega \tag{6-30}$$

式中${}^{C}I$是刚体在坐标系{C}中的惯性张量。刚体的质心在坐标系{C}的原点上。

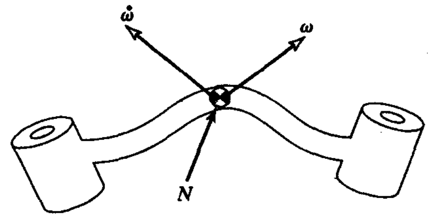


图6-4 作用在刚体上的力矩N，刚体旋转角速度ω和角加速度$\dot{\omega}$ 172

6.5 牛顿-欧拉迭代动力学方程

现在讨论对应于操作臂给定运动轨迹的力矩计算问题。假设已知关节的位置、速度和加速度（$\Theta, \dot{\Theta}, \ddot{\Theta}$），结合机器人运动学和质量分布方面的知识，可以计算出驱动关节运动所需的力矩。这个算法是Luh、Walker和Paul在文献[2]中提出来的。

计算速度和加速度的向外迭代法

为了计算作用在连杆上的惯性力，需要计算操作臂每个连杆在某一时刻的角速度、线加速度和角加速度。可应用迭代方法完成这些计算。首先对连杆1进行计算，接着计算下一个连杆，这样一直向外迭代到连杆n。

在第5章中已经讨论了角速度在连杆之间的“传递”问题，且有（对于第$i+1$个关节的旋转运动）

$$ {}^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}\omega_i + \dot{\theta}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} \tag{6-31} $$

由式（6-15）可以得到连杆之间角加速度变换的方程:

$$ {}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}\dot{\omega}_i + {}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}\omega_i \times \dot{\theta}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} + \ddot{\theta}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} \tag{6-32} $$

当第$i+1$个关节是移动关节时，上式可简化为

$$ {}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}\omega_i \tag{6-33} $$

应用式（6-12）可以得到每个连杆坐标系原点的线加速度:

$$ {}^{i+1}\dot{v}_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R({}^{i}\omega_i \times {}^{i}P_{i+1} + {}^{i}\omega_i \times ({}^{i}\omega_i \times {}^{i}P_{i+1}) + {}^{i}\dot{v}_i) \tag{6-34} $$

当第$i+1$个关节是移动关节时，上式可简化为（根据式（6-10））

$$ \begin{aligned} {}^{i+1}\dot{v}_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R({}^{i}\dot{\omega}_i \times {}^{i}P_{i+1} + {}^{i}\omega_i \times ({}^{i}\omega_i \times {}^{i}P_{i+1}) + {}^{i}\dot{v}_i) \\ + 2\,{}^{i+1}\omega_{i+1} \times \dot{d}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} + \ddot{d}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} \end{aligned} \tag{6-35} $$

同理，应用式（6-12）可以得到每个连杆质心的线加速度:

$$ {}^{i}\dot{v}_{C_i} = {}^{i}\dot{\omega}_i \times {}^{i}P_{C_i} + {}^{i}\omega_i \times ({}^{i}\omega_i + {}^{i}P_{C_i}) + {}^{i}\dot{v}_i \tag{6-36} $$

假定坐标系$\{C_i\}$固连于连杆i上，坐标系原点位于连杆质心，且各坐标轴方位与原连杆坐标系$\{i\}$方位相同。由于式（6-36）与关节的运动无关，因此无论是旋转关节还是移动关节，式（6-36）对于第$i+1$个连杆来说都是有效的。

173 注意，第1个连杆的方程非常简单，因为 ${}^{0}\omega_0={}^{0}\dot{\omega}_0=0$。

作用在连杆上的力和力矩

计算出每个连杆质心的线加速度和角加速度之后，运用牛顿-欧拉公式（见6.4节）便可以计算出作用在连杆质心上的惯性力和力矩。即:

$$F_i = m\dot{v}_{C_i}$$
$$N_i = {}^{C_i}I\dot{\omega}_i + \omega_i \times {}^{C_i}I\omega_i \qquad (6\text{-}37)$$

式中坐标系$\{C_i\}$的原点位于连杆质心，各坐标轴方位与原连杆坐标系$\{i\}$方位相同。

计算力和力矩的向内迭代法

计算出作用在每个连杆上的力和力矩之后，需要计算关节力矩，它们是实际施加在连杆上的力和力矩。

根据典型连杆在无重力状态下的受力图（见图6-5）列出力平衡方程和力矩平衡方程。每个连杆都受到相邻连杆的作用力和力矩以及附加的惯性力和力矩。在第5章中已经定义了一些专用符号用来表示相邻连杆的作用力和力矩，在这里重新写出:

f_i =连杆$i-1$作用在连杆i上的力;

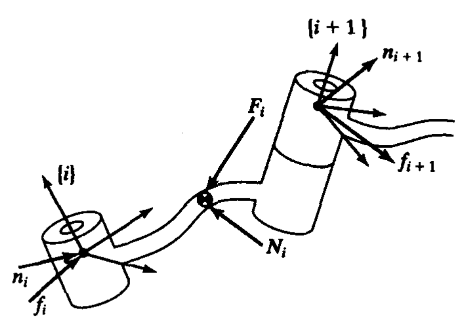
n_i =连杆$i-1$作用在连杆i上的力矩。

将所有作用在连杆i上的力相加，得到力平衡方程:

$${}^{i}F_i = {}^{i}f_i - {}^{i}_{i+1}R\,{}^{i+1}f_{i+1} \qquad (6\text{-}38)$$

将所有作用在质心上的力矩相加，并且令它们的和为零，得到力矩平衡方程:

$${}^{i}N_i = {}^{i}n_i - {}^{i}n_{i+1} + (-{}^{i}P_{C_i}) \times {}^{i}f_i - ({}^{i}P_{i+1} - {}^{i}P_{C_i}) \times {}^{i}f_{i+1} \qquad (6\text{-}39)$$



174 图6-5 对于单个操作臂连杆的力平衡，包括惯性力

利用力平衡方程（式6-38）的结果以及附加旋转矩阵的办法，式（6-39）可写成

$${}^{i}N_i = {}^{i}n_i - {}^{i}_{i+1}R\,{}^{i+1}n_{i+1} - {}^{i}P_{C_i} \times {}^{i}F_i - {}^{i}P_{i+1} \times {}^{i}_{i+1}R\,{}^{i+1}f_{i+1} \qquad (6\text{-}40)$$

最后，重新排列力和力矩方程，形成相邻连杆从高序号向低序号排列的迭代关系:

$${}^{i}f_i = {}^{i}_{i+1}R\,{}^{i+1}f_{i+1} + {}^{i}F_i \qquad (6\text{-}41)$$

$${}^{i}n_i = {}^{i}N_i + {}^{i}_{i+1}R\,{}^{i+1}n_{i+1} + {}^{i}P_{C_i} \times {}^{i}F_i + {}^{i}P_{i+1} \times {}^{i}_{i+1}R\,{}^{i+1}f_{i+1} \qquad (6\text{-}42)$$

应用这些方程对连杆依次求解，从连杆n开始向内迭代一直到机器人基座。这些向内迭代求力的方法与第5章中介绍的静力学迭代方法相似，只是惯性力和力矩现在是作用在每个连杆上的。

在静力学中，可通过计算一个连杆施加于相邻连杆的力矩在 $\hat{Z}$ 方向的分量求得关节力矩：

$$\tau_i = {}^i n_i^T\,{}^i\hat{Z}_i \tag{6-43}$$

对于移动关节i，有

$$\tau_i = {}^i f_i^T\,{}^i\hat{Z}_i \tag{6-44}$$

式中符号τ表示线性驱动力。

注意，对一个在自由空间中运动的机器人来说， ${}^{N+1}f_{N+1}$ 和 ${}^{N+1}n_{N+1}$ 等于零，因此应用这些方程首先计算连杆n时是很简单的。如果机器人与环境接触， ${}^{N+1}f_{N+1}$ 和 ${}^{N+1}n_{N+1}$ 不为零，力平衡方程中就包含了接触力和力矩。

牛顿-欧拉迭代动力学算法

由关节运动计算关节力矩的完整算法由两部分组成。第一部分是对每个连杆应用牛顿-欧拉方程，从连杆1到连杆n向外迭代计算连杆的速度和加速度。第二部分是从连杆n到连杆1向内迭代计算连杆间的相互作用力和力矩以及关节驱动力矩。对于转动关节来说，这个算法归纳如下： 175

外推：$i:0\rightarrow 5$

$${}^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}\omega_i + \dot{\theta}_{i+1}\,{}^{i+1}Z_{i+1} \tag{6-45}$$

$${}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}\dot{\omega}_i + {}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}\omega_i \times \dot{\theta}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} + \ddot{\theta}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} \tag{6-46}$$

$${}^{i+1}\dot{v}_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R({}^{i}\dot{\omega}_i \times {}^{i}P_{i+1} + {}^{i}\omega_i \times ({}^{i}\omega_i \times {}^{i}P_{i+1}) + {}^{i}\dot{v}_i) \tag{6-47}$$

$$\begin{aligned}{}^{i+1}\dot{v}_{C_{i+1}} &= {}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} \times {}^{i+1}P_{C_{i+1}} \\ &\quad + {}^{i+1}\omega_{i+1} \times ({}^{i+1}\omega_{i+1} \times {}^{i+1}P_{C_{i+1}}) + {}^{i+1}\dot{v}_{i+1}\end{aligned} \tag{6-48}$$

$${}^{i+1}F_{i+1} = m_{i+1}\,{}^{i+1}\dot{v}_{C_{i+1}} \tag{6-49}$$

$${}^{i+1}N_{i+1} = {}^{C_{i+1}}I_{i+1}\,{}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} + {}^{i+1}\omega_{i+1} \times {}^{C_{i+1}}I_{i+1}\,{}^{i+1}\omega_{i+1} \tag{6-50}$$

内推：$i:6\rightarrow 1$

$${}^{i}f_i = {}^{i}_{i+1}R\,{}^{i+1}f_{i+1} + {}^{i}F_i \tag{6-51}$$

$$\begin{aligned}{}^{i}n_i &= {}^{i}N_i + {}^{i}_{i+1}R\,{}^{i+1}n_{i+1} + {}^{i}P_{C_i} \times {}^{i}F_i \\ &\quad + {}^{i}P_{i+1} \times {}^{i}_{i+1}R\,{}^{i+1}f_{i+1}\end{aligned} \tag{6-52}$$

$$\tau_i = {}^{i}n_i^T\,{}^{i}\hat{Z}_i \tag{6-53}$$

计及重力的动力学算法

令 ${}^{0}\dot{v}_0 = G$ 就可以很简单地将作用在连杆上的重力因素包括到动力学方程中去，其中G与重力矢量大小相等，而方向相反。这等效于机器人正以1g的加速度在做向上加速运动。这个假想的向上加速度与重力作用在连杆上的效果是相同的。因而，不需要其他额外的计算就可以对重力影响进行计算。

6.6 迭代形式与封闭形式的动力学方程

已知关节位置、速度和加速度，应用方程（6-45）～（6-53）就可以计算所需的关节力矩。如同在第5章中的方法计算雅可比矩阵一样，方程（6-45）～（6-53）主要应用于两个方面：进行数值计算或作为一种分析算法用于符号方程的推导。

将这些方程用于数值计算是很有用的，因为这些方程适用于任何机器人。只要将待求操作臂的惯性张量、连杆质量、矢量P_{C_i}以及矩阵${}^{i+1}_{i}R$带入到这些方程中，就可以直接计算出任何运动情况下的关节力矩。

然而，我们经常需要对方程的结构进行研究。例如，重力项的形式是什么？重力影响与惯性力影响相比较哪一个影响较大？为了研究诸如此类的问题，经常需要给出封闭形式的动
176 力学方程。应用牛顿-欧拉方程递推算法对Θ, $\dot{\Theta}$和$\ddot{\Theta}$进行符号推导即可得到这些方程。这与第5章中推导符号形式的雅克比矩阵相似。

6.7 封闭形式动力学方程应用举例

这里我们计算图6-6所示平面二连杆操作臂的封闭形式动力学方程。为简单起见，假设操作臂的质量分布非常简单：每个连杆的质量都集中在连杆的末端，设其质量分别为m_1和m_2。

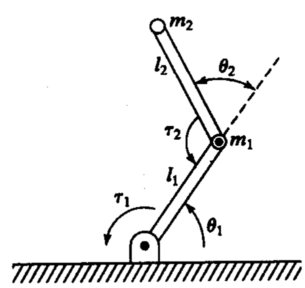


图6-6 质量集中在连杆末端的二连杆平面操作臂

首先，确定牛顿-欧拉迭代公式中各参量的值。每个连杆质心的位置矢量

$$^{1}P_{C_1} = l_1\hat{X}_1$$
$$^{2}P_{C_2} = l_2\hat{X}_2$$

由于假设为集中质量，因此每个连杆质心的惯性张量为零矩阵：

$$^{C_1}I_1 = 0$$
$$^{C_2}I_2 = 0$$

末端执行器上没有作用力，因而有

$$f_3 = 0$$
$$n_3 = 0$$

机器人基座不旋转，因此有

$$\omega_0 = 0$$
177
$$\dot{\omega}_0 = 0$$

包括重力因素，有

$$^{0}\dot{v}_0 = g\hat{Y}_0$$

相邻连杆坐标系之间的相对转动由下式给出

$$
{}_{i+1}^{\ i}R=\begin{bmatrix} c_{i+1} & -s_{i+1} & 0.0 \\ s_{i+1} & c_{i+1} & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}
$$

$$
{}_{i}^{i+1}R=\begin{bmatrix} c_{i+1} & s_{i+1} & 0.0 \\ -s_{i+1} & c_{i+1} & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}
$$

应用方程（6-45）~（6-53）。

对连杆1用向外迭代法求解如下：

$$
{}^{1}\omega_{1}=\dot{\theta}_{1}{}^{1}\hat{Z}_{1}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_{1} \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{1}\dot{\omega}_{1}=\ddot{\theta}_{1}{}^{1}\hat{Z}_{1}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_{1} \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{1}\dot{v}_{1}=\begin{bmatrix} c_{1} & s_{1} & 0 \\ -s_{1} & c_{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ g \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} gs_{1} \\ gc_{1} \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{1}\dot{v}_{C_{1}}=\begin{bmatrix} 0 \\ l_{1}\ddot{\theta}_{1} \\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -l_{1}\dot{\theta}_{1}^{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} gs_{1} \\ gc_{1} \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -l_{1}\dot{\theta}_{1}^{2}+gs_{1} \\ l_{1}\ddot{\theta}_{1}+gc_{1} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6-54}
$$

$$
{}^{1}F_{1}=\begin{bmatrix} -m_{1}l_{1}\dot{\theta}_{1}^{2}+m_{1}gs_{1} \\ m_{1}l_{1}\ddot{\theta}_{1}+m_{1}gc_{1} \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{1}N_{1}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

对连杆2用向外迭代法求解如下：

$$
{}^{2}\omega_{2}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_{1}+\dot{\theta}_{2} \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{2}\dot{\omega}_{2}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_{1}+\ddot{\theta}_{2} \end{bmatrix} \tag{6-55}
$$

178

$$
{}^{2}\dot{v}_{2}=\begin{bmatrix} c_{2} & s_{2} & 0 \\ -s_{2} & c_{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -l_{1}\dot{\theta}_{1}^{2}+gs_{1} \\ l_{1}\ddot{\theta}_{1}+gc_{1} \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} l_{1}\ddot{\theta}_{1}s_{2}-l_{1}\dot{\theta}_{1}^{2}c_{2}+gs_{12} \\ l_{1}\ddot{\theta}_{1}c_{2}+l_{1}\dot{\theta}_{1}^{2}s_{2}+gc_{12} \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^2\dot{v}_{C_2}=\begin{bmatrix}0\\ l_2(\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2)\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-l_2(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)^2\\ 0\\ 0\end{bmatrix}
+\begin{bmatrix}l_1\ddot{\theta}_1 s_2-l_1\dot{\theta}_1^2 c_2+gs_{12}\\ l_1\ddot{\theta}_1 c_2+l_1\dot{\theta}_1^2 s_2+gc_{12}\\ 0\end{bmatrix}
$$

$$
{}^2F_2=\begin{bmatrix}m_2l_1\ddot{\theta}_1 s_2-m_2l_1\dot{\theta}_1^2c_2+m_2gs_{12}-m_2l_2(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)^2\\ m_2l_1\ddot{\theta}_1c_2+m_2l_1\dot{\theta}_1^2c_2+m_2gc_{12}+m_2l_2(\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2)\\ 0\end{bmatrix} \tag{6-55'}
$$

$$
{}^2N_2=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}
$$

对连杆2用向内迭代法求解如下:

$$
{}^2f_2={}^2F_2
$$

$$
{}^2n_2=\begin{bmatrix}0\\0\\ m_2l_1l_2c_2\ddot{\theta}_1+m_2l_1l_2s_2\dot{\theta}_1^2+m_2l_2gc_{12}+m_2l_2^2(\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2)\end{bmatrix} \tag{6-56}
$$

对连杆1用向内迭代法求解如下:

$$
{}^1f_1=\begin{bmatrix}c_2 & -s_2 & 0\\ s_2 & c_2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m_2l_2s_2\ddot{\theta}_1-m_2l_1c_2\dot{\theta}_1^2+m_2gs_{12}-m_2l_2(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)^2\\ m_2l_1c_2\ddot{\theta}_1+m_2l_1s_2\dot{\theta}_1^2+m_2gc_{12}+m_2l_2(\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2)\\ 0\end{bmatrix}
+\begin{bmatrix}-m_1l_1\dot{\theta}_1^2+m_1gs_1\\ m_1l_1\ddot{\theta}_1+m_1gc_1\\ 0\end{bmatrix}
$$

$$
{}^1n_1=\begin{bmatrix}0\\0\\ m_2l_1l_2c_2\ddot{\theta}_1+m_2l_1l_2s_2\dot{\theta}_1^2+m_2l_2gc_{12}+m_2l_2^2(\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2)\end{bmatrix}
+\begin{bmatrix}0\\0\\ m_1l_1^2\ddot{\theta}_1+m_1l_1gc_1\end{bmatrix}
+\begin{bmatrix}0\\0\\ m_2l_1^2\ddot{\theta}_1-m_2l_1l_2s_2(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)^2+m_2l_1gs_2s_{12}\\ +m_2l_1l_2c_2(\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2)+m_2l_1gc_2c_{12}\end{bmatrix} \tag{6-57}
$$

179

取 ${}^{i}n_i$ 中的 $\hat{Z}$ 方向分量，得关节力矩:

$$\begin{aligned}\tau_1 &= m_2 l_2^2(\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2)+m_2 l_1 l_2 c_2(2\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2)+(m_1+m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1-m_2 l_1 l_2 s_2\dot{\theta}_2^2\\ &\quad -2m_2 l_1 l_2 s_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2+m_2 l_2 g c_{12}+(m_1+m_2)l_1 g c_1\\ \tau_2 &= m_2 l_1 l_2 c_2\ddot{\theta}_1+m_2 l_1 l_2 s_2\dot{\theta}_1^2+m_2 l_2 g c_{12}+m_2 l_2^2(\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2)\end{aligned} \tag{6-58}$$

式（6-58）将驱动力矩表示为关于关节位置、速度和加速度的函数。注意，如此复杂的函数表达式描述的竟是一个假设的最简单的操作臂。可见，一个封闭形式的6自由度操作臂的动力学方程将是相当复杂的。

6.8 操作臂动力学方程的结构

通过忽略一个方程中的某些细节可以很方便地表示操作臂的动力学方程，而仅显示方程的某些结构。

状态空间方程

当用牛顿-欧拉方程对操作臂进行分析时，动力学方程可以写成如下形式

$$\tau = M(\Theta)\ddot{\Theta}+V(\Theta,\dot{\Theta})+G(\Theta) \tag{6-59}$$

式中$M(\Theta)$为操作臂的$n\times n$**质量矩阵**，$V(\Theta,\dot{\Theta})$是$n\times 1$的离心力和哥氏力矢量，$G(\Theta)$是$n\times 1$重力矢量。上式之所以称为**状态空间方程**，是因为式（6-59）中的矢量$V(\Theta,\dot{\Theta})$取决于位置和速度[3]。

$M(\Theta)$和$G(\Theta)$中的元素都是关于操作臂所有关节位置Θ的复杂函数。而$V(\Theta,\dot{\Theta})$中的元素都是关于Θ和$\dot{\Theta}$的复杂函数。

可以将操作臂动力学方程中不同类型的项划分为质量矩阵、离心力和哥氏力矢量以及重力矢量。

例6.3

求6.7节中操作臂的$M(\Theta)$，$V(\Theta,\dot{\Theta})$和$G(\Theta)$。

式（6-59）定义了操作臂的质量矩阵$M(\Theta)$，组成$M(\Theta)$的所有各项均为Θ的函数并与$\ddot{\Theta}$相乘。因此有

$$M(\Theta)=\begin{bmatrix} l_2^2 m_2+2l_1 l_2 m_2 c_2+l_1^2(m_1+m_2) & l_2^2 m_2+l_1 l_2 m_2 c_2\\ l_2^2 m_2+l_1 l_2 m_2 c_2 & l_2^2 m_2\end{bmatrix} \tag{6-60}$$

操作臂的质量矩阵都是对称和正定的，因而都是可逆的。

速度项$V(\Theta,\dot{\Theta})$包含了所有与关节速度有关的项，即

$$V(\Theta,\dot{\Theta})=\begin{bmatrix}-m_2 l_1 l_2 s_2\dot{\theta}_2^2-2m_2 l_1 l_2 s_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\\ m_2 l_1 l_2 s_2\dot{\theta}_1^2\end{bmatrix} \tag{6-61}$$

180

$-m_2 l_1 l_2 s_2\dot{\theta}_2^2$是与**离心力**有关的项，因为它是关节速度的平方。$-2m_2 l_1 l_2 s_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2$是与哥氏力有关的项，因为它总是包含两个不同关节速度的乘积。

重力项$G(\Theta)$包含了所有与重力加速度g有关的项，因而有

$$G(\Theta)=\begin{bmatrix} m_2l_2gc_{12}+(m_1+m_2)l_1gc_1 \\ m_2l_2gc_{12} \end{bmatrix} \tag{6-62}$$

注意，重力项只与Θ有关，而与它的导数无关。

形位空间方程

将动力学方程中的速度项$V(\Theta,\dot{\Theta})$写成另外一种形式如下

$$\tau=M(\Theta)\ddot{\Theta}+B(\Theta)[\dot{\Theta}\dot{\Theta}]+C(\Theta)[\dot{\Theta}^2]+G(\Theta) \tag{6-63}$$

式中$B(\Theta)$是$n\times n(n-1)/2$阶的哥氏力系数矩阵，$[\dot{\Theta}\dot{\Theta}]$是$n(n-1)/2\times 1$阶的关节速度积矢量，即

$$[\dot{\Theta}\dot{\Theta}]=[\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \ \ \dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 \ \cdots \ \dot{\theta}_{n-1}\dot{\theta}_n]^T \tag{6-64}$$

$C(\Theta)$是$n\times n$阶离心力系数矩阵，而$[\dot{\Theta}^2]$是$n\times 1$阶矢量，即

$$[\dot{\theta}_1^2 \ \ \dot{\theta}_2^2 \ \cdots \ \dot{\theta}_n^2]^T \tag{6-65}$$

式（6-63）称为**形位空间方程**，因为它的系数矩阵仅是操作臂位置的函数[3]。

在这种形式的动力学方程中，计算的复杂性反映在对各种参数的计算方式上，而这些参数仅是操作臂位置Θ的函数。在应用中（例如在计算机控制操作臂时），重要的是要求动力学方程必须随着操作臂的运动不断更新。（方程（6-63）表明了哪些参数仅是关节位置的函数，并且能够随着操作臂位形的变化及时更新。）在第10章中将讨论与操作臂控制有关的计算方法问题。

例6.4

求6.7节中操作臂的$B(\Theta)$和$C(\Theta)$（见式（6-63））。

对于图示的简单二连杆操作臂，有

$$[\dot{\Theta}\dot{\Theta}]=[\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2]$$
$$[\dot{\Theta}^2]=\begin{bmatrix}\dot{\theta}_1^2\\ \dot{\theta}_2^2\end{bmatrix} \tag{6-66}$$

181

因此有

$$B(\Theta)=\begin{bmatrix}-2m_2l_1l_2s_2\\ 0\end{bmatrix} \tag{6-67}$$

和

$$C(\Theta)=\begin{bmatrix}0 & -m_2l_1l_2s_2\\ m_2l_1l_2s_2 & 0\end{bmatrix} \tag{6-68}$$

6.9 操作臂动力学的拉格朗日公式

牛顿-欧拉方法是基于基本动力学公式（6-29）和（6-30）以及作用在连杆之间约束力和力矩分析之上的。替代牛顿-欧拉方法的另一种方法是本节我们将要简要介绍的**拉格朗日动力学公式**。牛顿-欧拉公式可以被认为是一种解决动力学问题的力平衡方法，而拉格朗日公式则是一种基于能量的动力学方法。当然，对于同一个操作臂来说，两种方法得到的运动方程是相同的。我们这里讨论的拉格朗日动力学是比较简单的，有时特指刚性连杆串联的操作臂的情况。更全面的介绍，可参见文献[4]。

首先讨论操作臂动能的表达式。第i根连杆的动能k_i可以表示为

$$k_i=\frac{1}{2}m_i\,\upsilon_{C_i}^T\upsilon_{C_i}+\frac{1}{2}{}^i\omega_i^T\,{}^{C_i}I_i\,{}^i\omega_i \tag{6-69}$$

式中第一项是由连杆质心线速度产生的动能，第二项是由连杆的角速度产生的动能。整个操作臂的动能是各个连杆动能之和，即

$$k=\sum_{i=1}^{n}k_i \tag{6-70}$$

式（6-69）中的υ_{C_i}和${}^i\omega_i$是Θ和$\dot{\Theta}$的函数。由此我们可知操作臂的动能$k(\Theta,\dot{\Theta})$可以描述为关节位置和速度的标量函数。事实上，操作臂的动能可以写成

$$k(\Theta,\dot{\Theta})=\frac{1}{2}\dot{\Theta}^TM(\Theta)\dot{\Theta} \tag{6-71}$$

这里$M(\Theta)$是在6.8节介绍过的$n\times n$操作臂的质量矩阵。我们知道式（6-71）的表达是一种**二次型**[5]，也就是说，将这个矩阵展开后，方程全部是由$\dot{\theta}_i$的二次项组成的。而且，由于总动能永远是正的，因此操作臂质量矩阵一定是**正定**矩阵。正定矩阵的二次型永远是正值。方程（6-71）类似于我们熟悉的质点动能表达式

$$k=\frac{1}{2}m\upsilon^2 \tag{6-72}$$ 182

实际上操作臂的质量矩阵一定是正定的，这类似于质量总是正数这一事实。

第i根连杆的势能u_i可以表示为

$$u_i=-m_i\,{}^0g^T\,{}^0P_{C_i}+u_{ref_i} \tag{6-73}$$

这里${}^0g$是3×1的重力矢量，${}^0P_{C_i}$是位于第i根连杆质心的矢量，u_{ref_i}是使u_i的最小值为零的常数⊖。操作臂的总势能为各个连杆势能之和，即

$$u=\sum_{i=1}^{n}u_i \tag{6-74}$$

因为式（6-73）中的${}^0P_{C_i}$是Θ的函数，由此可以看出操作臂的势能$u(\Theta)$可以描述为关节位置的标量函数。

⊖ 实际上动力学方程中仅出现势能对于Θ的偏导数，因此这个常数是任意的，这相当于势能可以相对于任意一个参考零点来定义。

拉格朗日动力学公式给出了一种从标量函数推导动力学方程的方法，我们称这个标量函数为**拉格朗日函数**，即一个机械系统的动能和势能的差值。这里，操作臂的拉格朗日函数可表示为

$$\mathcal{L}(\Theta,\dot{\Theta})=k(\Theta,\dot{\Theta})-u(\Theta) \tag{6-75}$$

则操作臂的运动方程为

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\Theta}}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Theta}=\tau \tag{6-76}$$

这里τ是$n\times 1$的驱动力矩矢量。对于操作臂来说，方程变为

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial k}{\partial\dot{\Theta}}-\frac{\partial k}{\partial\Theta}+\frac{\partial u}{\partial\Theta}=\tau \tag{6-77}$$

为简化起见，这里省略了$k(\cdot)$和$u(\cdot)$中的自变量。

例6.5

在图6-7中，RP操作臂连杆的惯性张量为

$$
\begin{aligned}
{}^{C_1}I_1&=\begin{bmatrix} I_{xx1} & 0 & 0\\ 0 & I_{yy1} & 0\\ 0 & 0 & I_{zz1}\end{bmatrix}\\
{}^{C_2}I_2&=\begin{bmatrix} I_{xx2} & 0 & 0\\ 0 & I_{yy2} & 0\\ 0 & 0 & I_{zz2}\end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{6-78}
$$

183

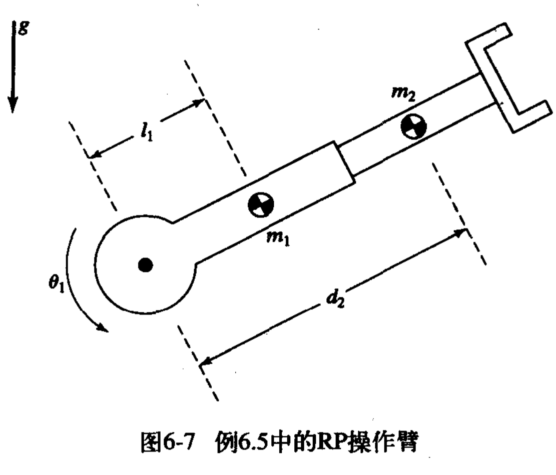


图6-7 例6.5中的RP操作臂

总质量为m_1和m_2。从图6-7中可知，连杆1的质心与关节1的轴线相距l_1，连杆2的质心与关节1的轴线距离为变量d_2。用拉格朗日动力学方法求此操作臂的动力学方程。

由式（6-69），我们可写出连杆1的动能为

$$k_1=\frac{1}{2}m_1l_1^2\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}I_{zz1}\dot{\theta}_1^2 \tag{6-79}$$

连杆2的动能为

$$k_2=\frac{1}{2}m_2(d_2^2\dot{\theta}_1^2+\dot{d}_2^2)+\frac{1}{2}I_{zz2}\dot{\theta}_1^2 \tag{6-80}$$

因此，总动能为

$$k(\Theta,\dot{\Theta})=\frac{1}{2}(m_1l_1^2+I_{zz1}+I_{zz2}+m_2d_2^2)\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot{d}_2^2 \tag{6-81}$$

由式（6-73），可写出连杆1的势能

$$u_1=m_1l_1g\sin\theta_1+m_1l_1g \tag{6-82}$$

连杆2的势能

$$u_2=m_2gd_2\sin\theta_1+m_2gd_{2\max} \tag{6-83}$$

在这里$d_{2\max}$是关节2的最大运动范围。因此，总势能为

$$u(\Theta)=g(m_1l_1+m_2d_2)\sin\theta_1+m_1l_1g+m_2gd_{2\max} \tag{6-84}$$ 184

其次，求式（6-77）中的偏导数

$$\frac{\partial k}{\partial\dot{\Theta}}=\begin{bmatrix}(m_1l_1^2+I_{zz1}+I_{zz2}+m_2d_2^2)\dot{\theta}_1\\ m_2\dot{d}_2\end{bmatrix} \tag{6-85}$$

$$\frac{\partial k}{\partial\Theta}=\begin{bmatrix}0\\ m_2d_2\dot{\theta}_1^2\end{bmatrix} \tag{6-86}$$

$$\frac{\partial u}{\partial\Theta}=\begin{bmatrix}g(m_1l_1+m_2d_2)\cos\theta_1\\ gm_2\sin\theta_1\end{bmatrix} \tag{6-87}$$

最后，代入式（6-77）中，得

$$\begin{aligned}\tau_1&=(m_1l_1^2+I_{zz1}+I_{zz2}+m_2d_2^2)\ddot{\theta}_1+2m_2d_2\dot{\theta}_1\dot{d}_2\\&\quad+(m_1l_1+m_2d_2)g\cos\theta_1\\ \tau_2&=m_2\ddot{d}_2-m_2d_2\dot{\theta}_1^2+m_2g\sin\theta_1\end{aligned} \tag{6-88}$$

由式（6-88）可看出

$$\begin{aligned}M(\Theta)&=\begin{bmatrix}(m_1l_1^2+I_{zz1}+I_{zz2}+m_2d_2^2) & 0\\ 0 & m_2\end{bmatrix}\\ V(\Theta,\dot{\Theta})&=\begin{bmatrix}2m_2d_2\dot{\theta}_1\dot{d}_2\\ -m_2d_2\dot{\theta}_1^2\end{bmatrix}\\ G(\Theta)&=\begin{bmatrix}(m_1l_1+m_2d_2)g\cos\theta_1\\ m_2g\sin\theta_1\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{6-89}$$

■

6.10 建立笛卡儿空间的规范化操作臂动力学方程

上述动力学方程均是按照操作臂关节角（即关节空间）对位置和时间的导数建立的，其一般形式为

$$\tau = M(\Theta)\ddot{\Theta} + V(\Theta,\dot{\Theta}) + G(\Theta) \tag{6-90}$$

建立关节空间方程的目的是便于应用串联机构的性质推导动力学方程。本节将讨论笛卡儿空间末端执行器的加速度与作用在末端执行器上的笛卡儿空间力和力矩之间关系的动力学方程。

笛卡儿状态空间方程

在第10章和第11章将会看到，有时希望应用笛卡儿变量的一般形式[6]建立操作臂的动力学方程。

185 $$\mathcal{F} = M_x(\Theta)\ddot{\chi} + V_x(\Theta,\dot{\Theta}) + G_x(\Theta) \tag{6-91}$$

这里 $\mathcal{F}$ 是作用于机器人末端执行器上的力和力矩矢量，χ是一个能够恰当表达末端执行器位姿的笛卡儿矢量[7]。与关节空间参数相似，$M_x(\Theta)$是**笛卡儿质量矩阵**，$V_x(\Theta,\dot{\Theta})$是笛卡儿空间的速度项矢量，$G_x(\Theta)$是笛卡儿空间的重力项矢量。注意，作用于末端执行器上的摩擦力 $\mathcal{F}$ 实际上可以用关节驱动器的驱动力表示，即通过下面的关系式

$$\tau = J^T(\Theta)\mathcal{F} \tag{6-92}$$

这里雅克比矩阵$J(\Theta)$与 $\mathcal{F}$ 和 $\ddot{\chi}$ 的坐标系相同，这个坐标系通常为工具坐标系。

可以用如下方法得出式（6-90）和式（6-91）中各项之间的对应关系。首先，用雅克比转置矩阵的逆阵左乘式（6-90）得到

$$J^{-T}\tau = J^{-T}M(\Theta)\ddot{\Theta} + J^{-T}V(\Theta,\dot{\Theta}) + J^{-T}G(\Theta) \tag{6-93}$$

或

$$\mathcal{F} = J^{-T}M(\Theta)\ddot{\Theta} + J^{-T}V(\Theta,\dot{\Theta}) + J^{-T}G(\Theta) \tag{6-94}$$

其次，求关节空间和笛卡儿空间加速度之间的关系。由雅克比矩阵的定义得

$$\dot{\chi} = J\dot{\Theta} \tag{6-95}$$

求导得

$$\ddot{\chi} = \dot{J}\dot{\Theta} + J\ddot{\Theta} \tag{6-96}$$

求解式（6-96）得关节空间的加速度

$$\ddot{\Theta} = J^{-1}\ddot{\chi} - J^{-1}\dot{J}\dot{\Theta} \tag{6-97}$$

把式（6-97）代入式（6-94）得

$$\mathcal{F} = J^{-T}M(\Theta)J^{-1}\ddot{\chi} - J^{-T}M(\Theta)J^{-1}\dot{J}\dot{\Theta} + J^{-T}V(\Theta,\dot{\Theta}) + J^{-T}G(\Theta) \tag{6-98}$$

由此可以得出笛卡儿空间动力学方程中各项的表达式

$$\begin{aligned} M_x(\Theta) &= J^{-T}(\Theta)M(\Theta)J^{-1}(\Theta) \\ V_x(\Theta,\dot{\Theta}) &= J^{-T}(\Theta)(V(\Theta,\dot{\Theta}) - M(\Theta)J^{-1}(\Theta)\dot{J}(\Theta)\dot{\Theta}) \\ G_x(\Theta) &= J^{-T}(\Theta)G(\Theta) \end{aligned} \tag{6-99}$$

注意，式（6-99）中的雅克比矩阵和式（6-91）中的 $\mathcal{F}$ 和χ的坐标系相同，这个坐标系的
186 选择是任意的⊖。当操作臂达到奇异位置时，笛卡儿空间动力学方程中的某些量将趋于无穷大。

⊖ 为便于计算，可选择笛卡儿坐标系。

例6.6

对于6.7节中的二连杆平面机械臂，求笛卡儿空间形式的动力学方程。按照固连于第二根连杆末端的坐标系，写出它的动力学方程。

我们已经求出了这个操作臂的动力学方程（在6.7节中）和雅克比矩阵（方程5.66），这里我们重新给出

$$J(\Theta)=\begin{bmatrix} l_1s_2 & 0 \\ l_1c_2+l_2 & l_2 \end{bmatrix} \tag{6-100}$$

首先计算这个雅克比逆矩阵

$$J^{-1}(\Theta)=\frac{1}{l_1l_2s_2}\begin{bmatrix} l_2 & 0 \\ -l_1c_2-l_2 & l_1s_2 \end{bmatrix} \tag{6-101}$$

然后将个雅克比矩阵对时间求导，得

$$\dot{J}(\Theta)=\begin{bmatrix} l_1c_2\dot{\theta}_2 & 0 \\ -l_1s_2\theta_2 & 0 \end{bmatrix} \tag{6-102}$$

利用式（6-99）和6.7节中的结果可得

$$M_x(\Theta)=\begin{bmatrix} m_2+\frac{m_1}{s_2^2} & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

$$V_x(\Theta,\dot{\Theta})=\begin{bmatrix} -(m_2l_1c_2+m_2l_2)\dot{\theta}_1^2-m_2l_2\dot{\theta}_2^2-(2m_2l_2+m_2l_1c_2+m_1l_1\frac{c_2}{s_2^2})\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \\ m_2l_1s_2\dot{\theta}_1^2+l_1m_2s_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \tag{6-103}$$

$$G_x(\Theta)=\begin{bmatrix} m_1g\frac{c_1}{s_2}+m_2gs_{12} \\ m_2gc_{12} \end{bmatrix}$$

当$s_2=0$时，操作臂位于奇异位置，动力学方程中的某些项将趋于无穷大。例如，当$\theta_2=0$（机械臂伸直），末端执行器的笛卡儿有效质量在连杆2末端坐标系 $\hat{X}_2$ 方向上变为无穷大。一般奇异位形存在一个特定的方向，在这个奇异方向上运动是不可能的，但在与这个方向“正交”的子空间的一般运动是可能的[8]。

■

笛卡儿位形空间中的力矩方程

联立式（6-91）和式（6-92），可以用笛卡儿空间动力学方程写出等价的关节力矩

$$\tau=J^T(\Theta)(M_x(\Theta)\ddot{\chi}+V_x(\Theta,\dot{\Theta})+G_x(\Theta)) \tag{6-104}$$

将上式改写为如下形式有助于进一步讨论

$$\tau=J^T(\Theta)M_x(\Theta)\ddot{\chi}+B_x(\Theta)[\dot{\Theta}\dot{\Theta}]+C_x(\Theta)[\dot{\Theta}^2]+G(\Theta) \tag{6-105}$$ 187

式中$B_x(\Theta)$是$n\times n(n-1)/2$阶的哥氏力系数矩阵，$[\dot{\Theta},\dot{\Theta}]$是$n(n-1)/2\times 1$的关节速度积矢量，即

$$[\dot{\Theta}\dot{\Theta}] = [\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\ \dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 \cdots\ \dot{\theta}_{n-1}\dot{\theta}_n]^T \tag{6-106}$$

$C_x(\Theta)$是$n \times n$阶的离心系数矩阵，$[\dot{\Theta}^2]$是$n \times 1$阶矢量，由下式给出

$$[\dot{\theta}_1^2\ \dot{\theta}_2^2 \cdots \dot{\theta}_n^2]^T \tag{6-107}$$

注意，在式（6-105）中，$G(\Theta)$与关节空间方程中的相同，但一般情况下，$B_x(\Theta) \neq B(\Theta)$，$C_x(\Theta) \neq C(\Theta)$。

例6.7

根据式（6-105），求6.7节中操作臂的$B_x(\Theta)$和$C_x(\Theta)$。

如果求出$J^T(\Theta)V_x(\Theta, \dot{\Theta})$的乘积，可得

$$B_x(\Theta) = \begin{bmatrix} m_1 l_1^2 \frac{c_2}{s_2} - m_2 l_1 l_2 s_2 \\ m_2 l_1 l_2 s_2 \end{bmatrix} \tag{6-108}$$

和

$$C_x(\Theta) = \begin{bmatrix} 0 & -m_2 l_1 l_2 s_2 \\ m_2 l_1 l_2 s_2 & 0 \end{bmatrix} \tag{6-109}$$

■

6.11 计及非刚体效应

值得注意的是，我们推导出的动力学方程未能包含全部作用于操作臂上的力。它们只包含了刚体力学中的那些力，而没有包含摩擦力。然而摩擦力也是一种最重要的力，所有的机构都必然受到摩擦力的影响。齿轮传动在目前的操作臂中是相当典型的，然而由于摩擦产生的力是相当大的——在典型工况下大约相当于操作臂驱动力矩的25%。

为了使动力学方程能够反应实际工况，建立这些摩擦力的模型（至少是近似的）是非常重要的。最简单的摩擦力模型就是**粘性摩擦**，摩擦力矩与关节运动速度成正比，因此有

$$\tau_{friction} = \upsilon\dot{\theta} \tag{6-110}$$

这里υ是粘性摩擦系数。有时应用另一个简单的摩擦模型，就是**库仑摩擦**。库仑摩擦是一个常数，它的符号取决于关节速度，即

$$\tau_{friction} = c\,\mathrm{sgn}(\dot{\theta}) \tag{6-111}$$

式中c是库伦摩擦常数。当$\dot{\theta}=0$时，c值一般取为1，通常称为静摩擦系数；当$\dot{\theta}\neq 0$时，c值小
188 于1，称为动摩擦系数。对某个操作臂关节来说，采用粘性摩擦模型还是库仑摩擦模型是一个比较复杂的问题，这与润滑情况及其他影响因素有关。比较合理的模型是二者兼顾，可表示为

$$\tau_{friction} = c\,\mathrm{sgn}(\dot{\theta}) + \upsilon\dot{\theta} \tag{6-112}$$

在许多操作臂关节中，摩擦力也与关节位置有关。主要原因是齿轮失圆，齿轮的偏心将会导致摩擦力随关节位置而变化，因此一个比较复杂的摩擦力模型为

$$\tau_{friction} = f(\theta, \dot{\theta}) \tag{6-113}$$

然后将这些摩擦力模型附加到刚体力学模型中的动力学项中，得到一个更完整的模型

$$\tau = M(\Theta)\ddot{\Theta} + V(\Theta, \dot{\Theta}) + G(\Theta) + F(\Theta, \dot{\Theta}) \tag{6-114}$$

在这个模型中还忽略了其他一些影响因素。比如，刚性连杆的假设意味着在运动方程中未包括弯曲效应（能够引起谐振）。但是这些影响因素的建模十分复杂，已经超出了本书的范围（见文献[9，10]）。

6.12 动力学仿真

为了对操作臂的运动进行仿真，我们必须应用上节中建立的动力学模型。由封闭形式的动力学方程式（6-59），可通过仿真求出动力学方程中的加速度

$$\ddot{\Theta} = M^{-1}(\Theta)(\tau - V(\Theta, \dot{\Theta}) - G(\Theta) - F(\Theta, \dot{\Theta})) \tag{6-115}$$

可以应用几种已知的**数值积分**方法对加速度积分，计算出位置和速度。

已知操作臂运动的初始条件，通常为下面的形式

$$\begin{aligned} \Theta(0) &= \Theta_0 \\ \dot{\Theta}(0) &= 0 \end{aligned} \tag{6-116}$$

用步长Δt对式（6-115）进行数值积分。数值积分的方法有许多种[11]。这里，我们介绍最简单的一种数值积分方法，称为**欧拉积分**：从t=0开始，进行迭代计算

$$\begin{aligned} \dot{\Theta}(t+\Delta t) &= \dot{\Theta}(t) + \ddot{\Theta}(t)\Delta t \\ \Theta(t+\Delta t) &= \Theta(t) + \dot{\Theta}(t)\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{\Theta}(t)\Delta t^2 \end{aligned} \tag{6-117}$$

式中，对于每次迭代，要由式（6-115）计算一次 $\ddot{\Theta}$。这样，通过输入已知的力矩函数，用数值积分方法即可求出操作臂的位置、速度和加速度。

欧拉积分的概念是简单的，然而可采用更复杂的积分方法进行更精确有效的仿真[11]。如何选择Δt的大小是经常遇到的问题。Δt应当小到将连续时间离散为很小的时间增量，使得这 189
个近似是合理的，但Δt不应当过小，以免仿真计算花费的计算时间过长。

6.13 计算效率问题

因为典型操作臂的动力学方程非常复杂，因此必须考虑计算效率问题。本节中只讨论关节空间动力学问题，关于笛卡儿空间动力学的计算效率问题可参考文献[7，8]。

关于计算效率的研究简介

仅考虑向外迭代计算和向内迭代计算的简单情况，在计算方程（6-45）～（6-53）时需要进行的乘法计算和加法计算的次数为

$$126n - 99\text{次乘法}$$
$$106n - 92\text{次加法}$$

式中n是连杆的数量（这里至少为2）。尽管这个计算显得有些复杂，但这个方程的计算效率与前面提到的一些操作臂动力学公式相比要高得多。文献[12，13]中操作臂动力学方程的第一个公式是直接通过拉格朗日计算方法得到的，这种方法大约需要的计算次数为[14]。

$$32n^4+86n^3+171n^2+53n-128 \text{次乘法}$$
$$25n^4+66n^3+129n^2+42n-96 \text{次加法}$$

在典型情况下，即n=6时，牛顿-欧拉迭代方法的计算效率将比拉格朗日方法高约100倍！当然这两种方法得出的方程是等效的，数值计算的结果是完全相同的，但是方程的结构大不相同。这并不是说拉格朗日方法不能得到有效的方程。而是说，通过这种比较说明，在针对某一问题建立计算方法的时候，必须考虑计算效率。一种方法效率的高低是由连杆的迭代计算方法决定的，特别是与变量的表示方法有关[15]。

Renaud[16]和Liegois等人[17]早期在建立连杆质量分布公式中做出了贡献。在对人体四肢进行建模时，Stepanenko和Vukobratovic[18]开始以牛顿-欧拉方法研究动力学问题而不是用传统的拉格朗日方法。Orin等人[19]在研究行走机器人腿部运动的计算时对这种方法进行了修改。Orin研究小组采用局部连杆参考坐标系而不是在惯性坐标系中表示力和力矩，从而提高了计算效率。他们也注意到了相邻连杆计算的连续性，并且预测可能会存在一个有效的递归公式。
190 Armstrong[20]，Luh，Walker和Paul[2] 对计算效率问题进行了仔细研究，并且提出了关于$O(n)$复杂度的算法。他们通过建立迭代（或递归）计算方法和在局部连杆坐标系中表示连杆速度和加速度的方法建立了这种算法。Hollerbach[14]和Silver[15]又进一步研究了各种各样的计算算法。Hollerbach和Sahar[21]指出，对于某些特定的几何结构来说，算法的复杂度可以进一步降低。

封闭形式方程与迭代形式方程的计算效率

一般来说，本章介绍的迭代方法在计算任何操作臂动力学方程时都是非常有效的，但是封闭形式的方程对某些特殊的操作臂来说通常更为有效。以6.7节中两个连杆的平面操作臂为例，将n=2代入6.13节的公式中，可以看出采用迭代算法计算一般两连杆动力学方程需要153次乘法和120次加法计算。然而，这个特殊的两连杆机械臂十分简单：它是平面的，并且它的质量可被视为集中质量。因此，如果采用6.7节中给出的封闭形式的动力学方程，则仅需要进行30次乘法和13次加法计算。由于这种特殊的操作臂过于简单，因此这是一种极端情况，然而它说明封闭形式的方程可能是一种最有效的动力学方程。一些学者在一些文章中也表明，对于任意已知的操作臂，封闭形式的动力学方程比文献[22~27]中介绍的一些通用的方法更为有效。

因此，如果从运动学和动力学意义上讲操作臂的设计是*简单*的，那么它们的动力学方程也是简单的。可以定义一个运动学上的简单操作臂，使得这个操作臂的许多（或者全部）关节转角为0°，90°或－90°，并且许多连杆长度和偏距为零。我们可以定义一个**动力学上的简单**操作臂，使得每个连杆在坐标系$\{C_i\}$中的惯性张量矩阵为对角形。

封闭形式方程的缺点是比较简单，使得在建立方程时还需要相当多的人工劳动。然而，目前已开发出的封闭形式运动方程的符号编程装置，能够自动进行一些一般运算和三角变换的计算[25，28-30]。

有效的动力学仿真

对操作臂进行动力学数值仿真时，已知操作臂当前的位置、速度和输入力矩，我们感兴

趣的是求关节的加速度。一种有效的计算方法就是本章中讨论的动力学方程的计算方法以及求解方程（关节加速度）和数值积分的有效方法。文献[31]中介绍了几种高效的操作臂动力学仿真方法。 191

存储方案

在任何一种计算方法中，计算和存储是交替进行的。在计算操作臂的动力学方程（6-59）时，已经隐含了一种假设，即当求解τ值时，希望尽可能快地得出Θ，$\dot{\Theta}$和$\ddot{\Theta}$。如果需要，可以通过预先计算方程（6-59）中所有可能的Θ，$\dot{\Theta}$和$\ddot{\Theta}$（适当的量化），以提高存储容量为代价来减轻计算负担。还可以通过查询的方法得到需要的动力学计算过程的信息。

所需的存储容量是相当大的。设想每一个关节角范围被离散为10段；同样，设想速度和加速度也被离散为10段。对一个6关节的操作臂来说，(Θ，$\dot{\Theta}$和$\ddot{\Theta}$)量化空间的单元数量为$(10 \times 10 \times 10)^6$。而且每一个单元中还有6个力矩值。假设每一个力矩值需要一个计算字节，那么这个存储空间将有6×10^{18}个字节！注意，如果考虑负载质量的变化，那么这个存储空间还需要重新计算——即对于所有可能的负载还要增加一维存储空间。

还有许多减小存储空间的计算方法。例如，如果预先计算出方程（6-63）中的矩阵，则存储空间就只有一维（Θ）而不是三维。通过对Θ函数的查询，就会得到一个比较令人满意的计算量（见式（6-63））。对于更详细的论述和其他可能的参数化方法，可以参见文献[3]和[6]。

参考文献

[1] I. Shames, *Engineering Mechanics*, 2nd edition, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1967.

[2] J.Y.S. Luh, M.W. Walker, and R.P. Paul, "On-Line Computational Scheme for Mechanical Manipulators," *Transactions of the ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 1980.

[3] M. Raibert, "Mechanical Arm Control Using a State Space Memory," SME paper MS77-750, 1977.

[4] K.R. Symon, *Mechanics*, 3rd edition, Addison-Wesley, Reading, MA, 1971.

[5] B. Noble, *Applied Linear Algebra*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1969.

[6] O. Khatib, "Commande Dynamique dans L'Espace Operationnel des Robots Manipulateurs en Presence d'Obstacles," These de Docteur-Ingenieur. Ecole Nationale Superieure de l'Aeronautique et de L'Espace (ENSAE), Toulouse.

[7] O. Khatib, "Dynamic Control of Manipulators in Operational Space," Sixth IFTOMM Congress on Theory of Machines and Mechanisms, New Delhi, December 15–20, 1983.

[8] O. Khatib, "The Operational Space Formulation in Robot Manipulator Control," 15th ISIR, Tokyo, September 11–13, 1985.

[9] E. Schmitz, "Experiments on the End-Point Position Control of a Very Flexible One-Link Manipulator," Unpublished Ph.D. Thesis, Department of Aeronautics and Astronautics, Stanford University, SUDAAR No. 547, June 1985.

[10] W. Book, "Recursive Lagrangian Dynamics of Flexible Manipulator Arms," *International Journal of Robotics Research*, Vol. 3, No. 3, 1984. 192

[11] S. Conte and C. DeBoor, *Elementary Numerical Analysis: An Algorithmic Approach*, 2nd edition, McGraw-Hill, New York, 1972.

[12] J. Uicker, "On the Dynamic Analysis of Spatial Linkages Using 4 × 4 Matrices,"

Unpublished Ph.D dissertation, Northwestern University, Evanston, IL, 1965.

[13] J. Uicker, "Dynamic Behaviour of Spatial Linkages," *ASME Mechanisms*, Vol. 5, No. 68, pp. 1–15.

[14] J.M. Hollerbach, "A Recursive Lagrangian Formulation of Manipulator Dynamics and a Comparative Study of Dynamics Formulation Complexity," in *Robot Motion*, M. Brady et al., Editors, MIT Press, Cambridge, MA, 1983.

[15] W. Silver, "On the Equivalence of Lagrangian and Newton–Euler Dynamics for Manipulators," *International Journal of Robotics Research*, Vol. 1, No. 2, pp. 60–70.

[16] M. Renaud, "Contribution à l'Etude de la Modélisation et de la Commande des Systèmes Mécaniques Articulés," Thèse de Docteur-Ingénieur, Université Paul Sabatier, Toulouse, December 1975.

[17] A. Liegois, W. Khalil, J.M. Dumas, and M. Renaud, "Mathematical Models of Interconnected Mechanical Systems," Symposium on the Theory and Practice of Robots and Manipulators, Poland, 1976.

[18] Y. Stepanenko and M. Vukobratovic, "Dynamics of Articulated Open-Chain Active Mechanisms," *Math-Biosciences* Vol. 28, 1976, pp. 137–170.

[19] D.E. Orin et al, "Kinematic and Kinetic Analysis of Open-Chain Linkages Utilizing Newton–Euler Methods," *Math-Biosciences* Vol. 43, 1979, pp. 107–130.

[20] W.W. Armstrong, "Recursive Solution to the Equations of Motion of an N-Link Manipulator," *Proceedings of the 5th World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*, Montreal, July 1979.

[21] J.M. Hollerbach and G. Sahar, "Wrist-Partitioned Inverse Accelerations and Manipulator Dynamics," MIT AI Memo No. 717, April 1983.

[22] T.K. Kanade, P.K. Khosla, and N. Tanaka, "Real-Time Control of the CMU Direct Drive Arm II Using Customized Inverse Dynamics," *Proceedings of the 23rd IEEE Conference on Decision and Control*, Las Vegas, NV, December 1984.

[23] A. Izaguirre and R.P. Paul, "Computation of the Inertial and Gravitational Coefficients of the Dynamic Equations for a Robot Manipulator with a Load," *Proceedings of the 1985 International Conference on Robotics and Automation*, pp. 1024–1032, St. Louis, March 1985.

[24] B. Armstrong, O. Khatib, and J. Burdick, "The Explicit Dynamic Model and Inertial Parameters of the PUMA 560 Arm," *Proceedings of the 1986 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, San Francisco, April 1986, pp. 510–518.

[25] J.W. Burdick, "An Algorithm for Generation of Efficient Manipulator Dynamic Equations," *Proceedings of the 1986 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, San Francisco, April 7–11, 1986, pp. 212–218.

[26] T.R. Kane and D.A. Levinson, "The Use of Kane's Dynamical Equations in Robotics," *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 2, No. 3, Fall 1983, pp. 3–20.

[27] M. Renaud, "An Efficient Iterative Analytical Procedure for Obtaining a Robot Manipulator Dynamic Model," First International Symposium of Robotics Research,
193 NH, August 1983.

[28] W. Schiehlen, "Computer Generation of Equations of Motion," in *Computer Aided Analysis and Optimization of Mechanical System Dynamics*, E.J. Haug, Editor, Springer-Verlag, Berlin & New York, 1984.

[29] G. Cesareo, F. Nicolo, and S. Nicosia, "DYMIR: A Code for Generating Dynamic Model of Robots," in *Advanced Software in Robotics*, Elsevier Science Publishers, North-Holland, 1984.

[30] J. Murray, and C. Neuman, "ARM: An Algebraic Robot Dynamic Modelling Program," IEEE International Conference on Robotics, Atlanta, March 1984.

[31] M. Walker and D. Orin, "Efficient Dynamic Computer Simulation of Robotic Mechanisms," *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 104, 1982.

习题

6.1 [12] 求一匀质的、坐标原点建立在其质心的刚性圆柱体的惯性张量。

6.2 [32] 建立6.7节中二连杆操作臂的动力学方程。将每个连杆看作为一个匀质矩形刚体。各连杆的尺寸为l_i, ω_i和h_i，总质量为m_i。

6.3 [43]建立第3章习题3.3中的三连杆操作臂的动力学方程。将每个连杆看作为一个匀质矩形刚体。各连杆的尺寸为l_i, ω_i和h_i，总质量为m_i。

6.4 [13]式（6-45）~（6-53）表示带有移动关节的机构，建立这个机构的方程组。

6.5 [30]建立图6-8中所示的二连杆非平面操作臂的动力学方程。假设每个连杆的质量可视为集中于连杆末端（最外端）的集中质量。质量分别为m_1和m_2，连杆长度为l_1和l_2。这个操作臂与习题3.3中的前两个连杆相同。假设作用于每个关节的粘性摩擦系数分别为v_1和v_2。

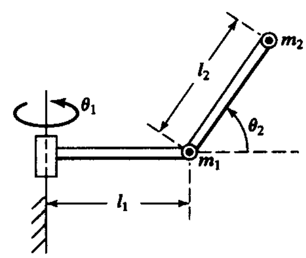


图6-8 质量集中于连杆末端的二连杆非平面操作臂

6.6 [32]推导6.7节中的二连杆平面操作臂基坐标下的笛卡儿空间方程。提示：参见例6.5，但要应用基坐标系下的雅克比矩阵。 194

6.7 [18]要存储一个一般三连杆操作臂动力学方程需要多大的内存空间？将每个关节的位置、速度和加速度离散为16段。需进行适当的假设。

6.8 [32]推导二连杆操作臂的动力学方程，如图4-6所示。已知连杆1的惯性张量:

$$
{}^{C_1}I=\begin{bmatrix} I_{xx1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz1} \end{bmatrix}
$$

假定连杆2的质量m_2集中于末端执行器处。

假定重力的方向是向下的（$\hat{Z}_1$的负方向）。

6.9 [37]推导具有一个移动关节的三连杆操作臂的动力学方程，见图3-9。已知连杆1的惯性张量:

$$
{}^{C_1}I=\begin{bmatrix} I_{xx1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz1} \end{bmatrix}
$$

连杆2的质量m_2集中于该连杆坐标系的原点处。连杆3的惯性张量为:

$$
{}^{C_3}I=\begin{bmatrix} I_{xx3} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy3} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz3} \end{bmatrix}
$$

假设重力方向为$\hat{Z}_1$的负方向，每个关节处的粘性摩擦系数为v_i。

6.10 [35]推导习题6.8中的操作臂在笛卡儿空间下的动力学方程。写出坐标系{2}中的方程。

6.11 一个单连杆操作臂的惯性张量为:

$$C_1 I=\begin{bmatrix} I_{xx1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz1} \end{bmatrix}$$

假定这只是连杆自身的惯量。如果电机电枢的惯量矩为I_m，齿轮的传动比为100，那么从电机轴[1]来看，总惯性张量是多少?

6.12 [20]如图6-9所示单自由度操作臂的总质量为m=1，质心为

$$^1P_C=\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

惯性张量为

$$^C I_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

从静止t=0开始，关节角θ_1（rad）按照如下的时间函数运动:

$$\theta_1(t)=bt+ct^2$$

195 作为时间t的函数求在坐标系{1}下，连杆的角加速度和质心的线加速度。

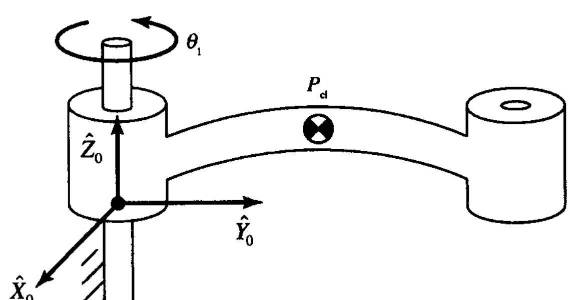


图6-9 习题6.12单杆"操作臂"

6.13 [40]建立图6-8中的二连杆非平面操作臂的笛卡儿动力学方程。假设每个连杆的质量可视为集中于连杆末端（最外端）的集中质量。质量分别为m_1和m_2，连杆长度为l_1和l_2。这个操作臂与习题3.3中的前两个连杆相同。假设作用于每个关节的粘性摩擦系数分别为v_1和v_2。写出坐标系{3}下的笛卡儿动力学方程，该坐标系位于操作臂的末端，并且与连杆坐标系{2}的方位相同。

6.14 [18]2自由度RP操作臂的动力学方程如下:

$$\tau_1 = m_1(d_1^2 + d_2)\ddot{\theta}_1 + m_2 d_2^2 \ddot{\theta}_1 + 2m_2 d_2 \dot{d}_2 \dot{\theta}_1$$
$$+ g\cos\theta_1[m_1(d_1 + d_2\dot{\theta}_1) + m_2(d_2 + \dot{d}_2)]$$
$$\tau_2 = m_1\dot{d}_2\ddot{\theta}_1 + m_2\ddot{d}_2 - m_1 d_1 \dot{d}_2 - m_2 d_2 \dot{\theta}^2 + m_2(d_2 + 1)g\sin\theta_1$$

式中有一些项显然是不正确的。请将它们指出。

6.15 [28]用牛顿-欧拉方法代替拉格朗日方法推导例6.5中RP操作臂的动力学方程。

6.16 [25]推导图6-10中PR操作臂的运动方程。忽略摩擦，但要包括重力。(这里，$\hat{X}_0$是竖直向上的)。连杆的惯性张量为对角形，惯性矩分别为I_{xx1}，I_{yy1}，I_{zz1}和I_{xx2}，I_{yy2}，I_{zz2}。连杆的质心分别为：

$$^1P_{C_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -l_1 \end{bmatrix}$$

$$^2P_{C_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

6.17 [40]在操作臂动力学方程中与速度相关的项可以被写成矩阵-矢量积的形式，即

$$V(\Theta,\dot{\Theta}) = V_m(\Theta,\dot{\Theta})\dot{\Theta}$$ 196

式中下标m代表“矩阵形式”。表示操作臂质量矩阵对时间的导数和$V_m(\cdot)$之间存在一种特定的关系。即：

$$\dot{M}(\Theta) = 2V_m(\Theta,\dot{\Theta}) - S$$

式中S是反对称矩阵。

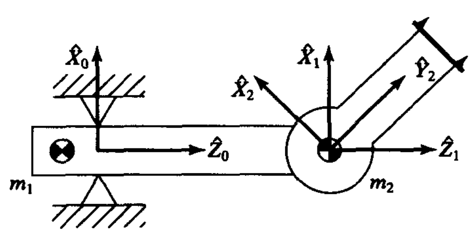


图6-10 习题6.16的PR操作臂

6.18 [15]给出合理的摩擦模型（即式（6-114）中$F(\Theta,\dot{\Theta})$）具有的两种属性。

6.19 [28]用拉格朗日方法做习题6.5。

6.20 [28]用拉格朗日方法推导6.7节中2自由度操作臂的动力学方程。

编程习题

1. 推导三连杆操作臂（例3.3中）的动力学方程。即，将6.7节的条件推广到三连杆的情况。已知操作臂参数：

$$l_1 = l_2 = 0.5\text{m}$$
$$m_1 = 4.6\text{Kg}$$
$$m_2 = 2.3\text{Kg}$$
$$m_3 = 1.0\text{Kg}$$
$$g = 9.8\text{m/s}^2$$

对前两个连杆来说，假定质量都集中在连杆末端。对连杆3来说，假定质心位于坐标系{3}的原点——即靠近连杆的末端。连杆3的惯性张量为

197

$$^{C_3}I = \begin{bmatrix} 0.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix} \text{Kg}-\text{m}^2$$

相对于连杆坐标系的连杆质心矢量为

$$^1P_{C_1} = l_1\hat{X}_1$$
$$^2P_{C_2} = l_2\hat{X}_2$$
$$^3P_{C_3} = 0$$

2. 写出三连杆操作臂的仿真程序。对于这个简单的欧拉积分程序，应用数值积分（如6.12节）方法即可。为使程序代码模块化，可以采用如下定义

```
Procedure UPDATE(VAR tau: vec3; VAR period: real; VAR
theta, thetadot: vec3);
```

其中“tau”是操作臂的力矩指令（在本题中始终为零），“period”是希望的时间步长（s）。“theta”和“thetadot”是操作臂的状态。Theta和thetadot用每次调用UPDATE的“period”秒数来更新。注意，“period”一般情况下要大于数值积分中的积分步长Δt。例如，尽管数值积分中的步长可能为0.001s，但你可以每0.1s打印一次操作臂的位置和速度。

为了检验仿真程序，设定关节力矩指令的值为0（对于全过程），进行如下检验:

(a) 将操作臂的初始位置设定为

$$[\theta_1\ \theta_2\ \theta_3] = [-90\ 0\ 0]$$

仿真几秒钟之后，看操作臂的运动是否与你所预计的一致?

(b) 将操作臂的初始位置设定为

$$[\theta_1\ \theta_2\ \theta_3] = [30\ 30\ 10]$$

仿真几秒钟之后，看操作臂的运动是否与你所预计的一致?

(c) 对被仿真的操作臂的每个关节引入粘性摩擦，即给每个关节的动力学方程中加入 $\tau_f = \upsilon\dot{\theta}$ 的项，式中每个关节的ν=5.0N · m · s(牛顿 · 米 · 秒)。重复上面的检验（b)，看运动是否是你所预计的?

MATLAB习题1

这个练习集中在平面2自由度2R机器人的逆动力学分析上（分步速度控制结构——见第5章MATLAB习题）。这个机器人是平面3自由度3R机器人的前两个R-关节和前两个运动连杆

（见图3-6和图3-7，DH参数由图3-8的前两行给出）。

计算这个平面2R机器人的关节力矩（也就是解逆动力学问题），目的是给分步速度控制方法提供每个时间步长内的指令运动。你既可以采用牛顿－欧拉数值递归方法，也可以采用习题6.2中得出的分析方程，或两者全用。 198

已知：L_1=1.0m，L_2=0.5m，两个连杆的质量密度均为ρ=7806kg/m³的实心钢，宽度和厚度为w=t=5cm。假定转动关节是理想的，将每个连杆的最外边缘连接起来（实际上是不可能的）。

初始角度为 $\Theta=\begin{Bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}10^\circ\\ 90^\circ\end{Bmatrix}$ 。

笛卡儿速度指令（常数）为 ${}^0\dot{X}={}^0\begin{Bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{Bmatrix}={}^0\begin{Bmatrix}0\\ 0.5\end{Bmatrix}$(m/s)。

仿真运动时间1s，控制步长0.01s。

请按下列条件绘出5个曲线图（请分开绘制）：

1. 两个关节角 $\Theta=\{\theta_1\ \theta_2\}^T$ （deg）与时间的关系曲线；
2. 两个关节速率 $\dot{\Theta}=\{\dot{\theta}_1\ \dot{\theta}_2\}^T$ （rad/s）与时间的关系曲线；
3. 两个关节加速度 $\ddot{\Theta}=\{\ddot{\theta}_1\ \ddot{\theta}_2\}^T$ （rad/s²）与时间的关系曲线；
4. ${}^0_HT$ 的3个笛卡儿坐标分量为$X=\{x\ \ y\ \ \phi\}^T$（ϕ的单位应为rad）与时间的关系曲线；
5. 两个逆动力学关节力矩$T=\{\tau_1\ \tau_2\}^T$（Nm）与时间的关系曲线。

仔细绘制每一张图中的曲线（徒手即可！），应标出轴的名称和单位。

进行两次仿真。第一次，不计重力（运动平面与重力是垂直的）；第二次，考虑重力g，方向为沿Y轴负向。

MATLAB 习题2

这个练习将集中在3自由度3R机器人（图3-6和3-7；DH参数在图3-8中已给出）的瞬态逆动力学解法上。已知长度参数如下：L_1=4，L_2=3，L_3=2（m）。作为动力学问题，还必须已知质量和惯量矩：m_1=20，m_2=15，m_3=10（kg），${}^CI_{zz1}=0.5$, ${}^CI_{zz2}=0.2$, ${}^CI_{zz3}=0.1$（kgm²）。假定每个连杆的重心在其几何中心处，并且假定重力作用在运动平面的-Y方向上。在这个练习中，不考虑驱动器的动力学问题和关节处的齿轮传动问题。

a) 编写一个MATLAB程序进行下列瞬态运动的牛顿-欧拉递归逆动力学求解（即，给定运动指令，计算所需的关节驱动力矩）：

$$\Theta=\begin{Bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\\ \theta_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}10^\circ\\ 20^\circ\\ 30^\circ\end{Bmatrix}\quad \dot{\Theta}=\begin{Bmatrix}\dot{\theta}_1\\ \dot{\theta}_2\\ \dot{\theta}_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{Bmatrix}(\text{rad/s})\quad \ddot{\Theta}=\begin{Bmatrix}\ddot{\theta}_1\\ \ddot{\theta}_2\\ \ddot{\theta}_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0.5\\ 1\\ 1.5\end{Bmatrix}(\text{rad/s}^2)$$

b) 用Corke MATLAB Robotics工具箱检验a）中的结果。试用函数*rne*()和*gravload*()。

MATLAB习题3

这个练习将集中在全部时间历程上的平面3自由度3R机器人的正动力学解法上（参数见

MATLAB习题2)。在此情况下，不计重力（即，假定重力的作用方向与运动平面垂直）。用
199 Corke MATLAB Robotics工具箱求解正动力学问题（即，已知驱动关节力矩指令，求解机器人相应的运动），关节力矩、初始关节角度和初始关节角速度如下：

$$T=\begin{Bmatrix}\tau_1\\ \tau_2\\ \tau_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}20\\ 5\\ 1\end{Bmatrix}\text{（Nm, 常量）}\qquad \Theta_0=\begin{Bmatrix}\theta_{10}\\ \theta_{20}\\ \theta_{30}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-60^\circ\\ 90^\circ\\ 30^\circ\end{Bmatrix}$$

$$\dot{\Theta}_0=\begin{Bmatrix}\dot{\theta}_{10}\\ \dot{\theta}_{20}\\ \dot{\theta}_{30}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}\text{(rad/s)}$$

仿真时间4s，并且试用函数*fdyn*()。

绘出机器人运动计算结果的两个曲线图（请分开绘制）：

1. 三个关节角（deg）$\Theta=\{\theta_1\ \theta_2\ \theta_3\}^T$ 与时间的关系曲线；
2. 三个关节角速度（rad/s）$\dot{\Theta}=\{\dot{\theta}_1\ \dot{\theta}_2\ \dot{\theta}_3\}^T$ 与时间的关系曲线。

200 仔细绘制每一张图中的曲线（徒手即可！），应标出轴的名称和单位。

第7章　轨迹的生成

7.1　概述

本章讨论计算轨迹的方法，该轨迹描述了操作臂在多维空间中的期望运动。在这里，**轨迹**指的是每个自由度的位置、速度和加速度的时间历程。

这个问题包括如何通过人机交互指定通过空间的一条轨迹或路径。为了使机器人系统的用户便于对操作臂的运动进行描述，不应当要求用户必须写出复杂的时间和空间的函数才能指定机器人任务。相反，应该允许用户通过简单的描述来指定机器人的期望运动，然后由系统来完成详细的计算。例如，用户可能只需给定末端执行器期望的目标位姿，而由系统来确定到达目标的准确路径、时间历程、速度曲线等等。

此外，规划好的轨迹如何在计算机中进行描述也是一个值得关注的问题。最后，要研究通过内部表达式计算轨迹的问题——即轨迹生成问题。大多数情况下，在轨迹生成的运行时间内需要计算位置、速度和加速度。这些轨迹由数字计算机计算，因此要以某种速率计算轨迹点，此速率叫做**路径更新率**。在典型的操作臂系统中，路径更新率在60Hz到2000Hz之间。

7.2　关于路径描述和路径生成的综述

在大多数情况下，将操作臂的运动看作是工具坐标系$\{T\}$相对于工作台坐标系$\{S\}$的运动。这 201
两种运动的方式是相同的，因为用户会感到按照这种方式描述路径和生成路径是非常有利的。

当按照工具坐标系相对于工作台坐标系的运动来指定路径时，其实是将运动的描述与任何具体的机器人、末端执行器或工件相分离。由此得到的模型，可将相同的路径描述应用于不同的操作臂或者用于具有不同工具尺寸的相同操作臂上。进而，总是可以通过相对于工作台坐标系的运动规划来确定和规划运动着的工作台（可能是一个传送带）的运动，而且在轨迹生成的运行时间内使得$\{S\}$的定义随时间变化。

如图7-1所示，一个基本问题是将操作臂从初始位置移动到某个最终期望位置——也就是将工具坐标系从当前值$\{T_{\text{initial}}\}$移动到最终期望值$\{T_{\text{final}}\}$。要注意，一般而言，运动包括工具相对于工作台的姿态变化和位置变化。

有时需要指定运动的更多细节而不只是简单地指定最终的期望位形。一种方法是在路径描述中给出一系列的期望**中间点**（位于初始位置和最终期望位置之间的过渡点）。因此，为了完成这个运动，工具坐标系必须经过中间点所描述的一系列过渡位置与姿态。每个中间点实际上都是确定工具相对于工作台的位置与姿态的坐标系。**路径点**这个术语包括了所有的中间点以及初始点和最终点。需要记住的是，虽然通常使用“点” 这个术语，但实际上它们是表达位置和姿态的坐标系。除了运动中的这些空间约束之外，用户可能还希望指定运动的瞬时属性。例如，在路径描述中可能还需要指定各中间点之间的时间间隔。

通常，期望操作臂的运动是平滑的。为此，要定义一个连续的且具有连续一阶导数的光滑函数。有时还希望二阶导数也是连续的。一般而言，急速的运动会加剧机构的磨损，激起

操作臂共振。因此，为了保证路径平滑，必须在各中间点之间，对路径的空间和时间特性给出一些限制条件。

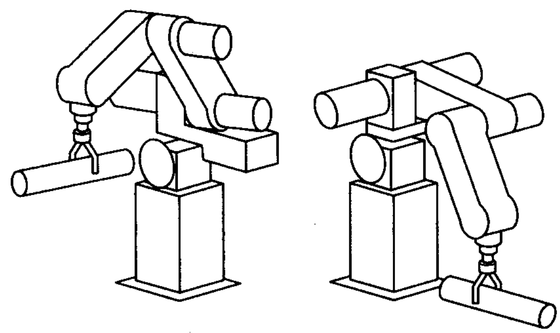


图7-1 在执行轨迹的过程中，操作臂以平滑的方式从初始位置运动到期望的目标位置

这样看来存在着很多种选择，因此可以使用很多方法来指定和规划路径。任何通过中间点的光滑函数都可以用来指定精确的路径。本章将从中选取一些简单的函数进行讨论。其他方法参见文献[1,2]和[13-16]。

7.3 关节空间规划方法

本节将研究以关节角的函数来描述轨迹（在空间和时间）的轨迹生成方法。

每个路径点通常是用工具坐标系{T}相对于工作台坐标系{S}的期望位姿来确定的。应用逆运动学理论，将中间点“转换”成一组期望的关节角。这样，就得到了经过各中间点并终止于目标点的n个关节的光滑函数。对于每个关节而言，由于各路径段所需要的时间是相同的，因此所有的关节将同时到达各中间点，从而得到{T}在每个中间点上的期望的笛卡儿位置。尽管对每个关节指定了相同的时间间隔，但对于某个特定的关节而言，其期望的关节角函数与其他关节函数无关。

因此，应用关节空间规划方法可以获得各中间点的期望位姿。尽管各中间点之间的路径在关节空间中的描述非常简单，但在笛卡儿坐标空间中的描述却很复杂。一般情况下，关节空间的规划方法便于计算，并且由于关节空间与笛卡儿坐标空间之间并不存在连续的对应关系，因而不会发生机构的奇异性问题。

三次多项式

下面考虑在一定时间内将工具从初始位置移动到目标位置的问题。应用逆运动学可以解出对应于目标位姿的各个关节角。操作臂的初始位置是已知的，并用一组关节角进行描述。现在需要确定每个关节的运动函数，其在t_0时刻的值为该关节的初始位置，在t_f时刻的值为该关节的期望目标位置。如图7-2所示，有多种光滑函数$\theta(t)$均可用于对关节角进行插值。

为了获得一条确定的光滑运动曲线，显然至少需要对$\theta(t)$施加四个约束条件。通过选择初始值和最终值可得到对函数值的两个约束条件：

202 ~ 203

$$\begin{aligned}\theta(0) &= \theta_0 \\ \theta(t_f) &= \theta_f\end{aligned} \tag{7-1}$$

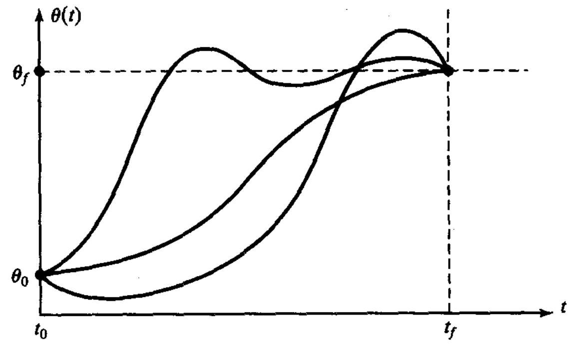


图7-2 某一关节的几种可能的路径曲线

另外两个约束条件需要保证关节速度函数连续，即：在初始时刻和终止时刻关节速度为零：

$$\begin{aligned}\dot{\theta}(0)&=0\\\dot{\theta}(t_f)&=0\end{aligned}\tag{7-2}$$

次数至少为3的多项式才能满足这四个约束条件（一个三次多项式有四个系数，所以它能够满足由式（7-1）和式（7-2）给出的四个约束条件）。这些约束条件唯一确定了一个三次多项式。该三次多项式具有如下形式

$$\theta(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3\tag{7-3}$$

所以对应于该路径的关节速度和加速度显然有

$$\begin{aligned}\dot{\theta}(t)&=a_1+2a_2t+3a_3t^2\\\ddot{\theta}(t)&=2a_2+6a_3t\end{aligned}\tag{7-4}$$

把这四个期望的约束条件代入式（7-3）和式（7-4）可以得到含有四个未知量的四个方程：

$$\begin{aligned}\theta_0&=a_0\\\theta_f&=a_0+a_1t_f+a_2t_f^2+a_3t_f^3\\0&=a_1\\0&=a_1+2a_2t_f+3a_3t_f^2\end{aligned}\tag{7-5}$$

解出方程中的a_i，可以得到

$$\begin{aligned}a_0&=\theta_0\\a_1&=0\\a_2&=\frac{3}{t_f^2}(\theta_f-\theta_0)\\a_3&=-\frac{2}{t_f^3}(\theta_f-\theta_0)\end{aligned}\tag{7-6}$$

204

应用式（7-6）可以求出从任何起始关节角位置到期望终止位置的三次多项式。但是该解仅适用于起始关节角速度与终止关节角速度均为零的情况。

例7.1

一个具有旋转关节的单杆机器人，处于静止状态时，θ=15°。期望在3s内平滑地运动关节角至θ=75°。求出满足该运动的一个三次多项式的系数，并且使操作臂在目标位置为静止状态。画出关节的位置、速度和加速度随时间变化的函数曲线。

将已知条件代入式（7-6），可以得到

$$\begin{aligned} a_0 &= 15.0 \\ a_1 &= 0.0 \\ a_2 &= 20.0 \\ a_3 &= -4.44 \end{aligned} \tag{7-7}$$

根据式（7-3）和式（7-4），可以求得

$$\begin{aligned} \theta(t) &= 15.0 + 20.0t^2 - 4.44t^3 \\ \dot{\theta}(t) &= 40.0t - 13.33t^2 \\ \ddot{\theta}(t) &= 40.0 - 26.66t \end{aligned} \tag{7-8}$$

图7-3所示为在40Hz时，对应于该运动的关节位置、速度和加速度函数曲线。注意，任何三次函数的速度曲线为抛物线，加速度曲线为直线。

■

具有中间点的路径的三次多项式

到目前为止，已经讨论了用期望的时间间隔和最终目标点描述的运动。一般而言，希望确定包含中间点的路径。如果操作臂能够停留在每个中间点，那么可以使用7.3节的三次多项式求解。

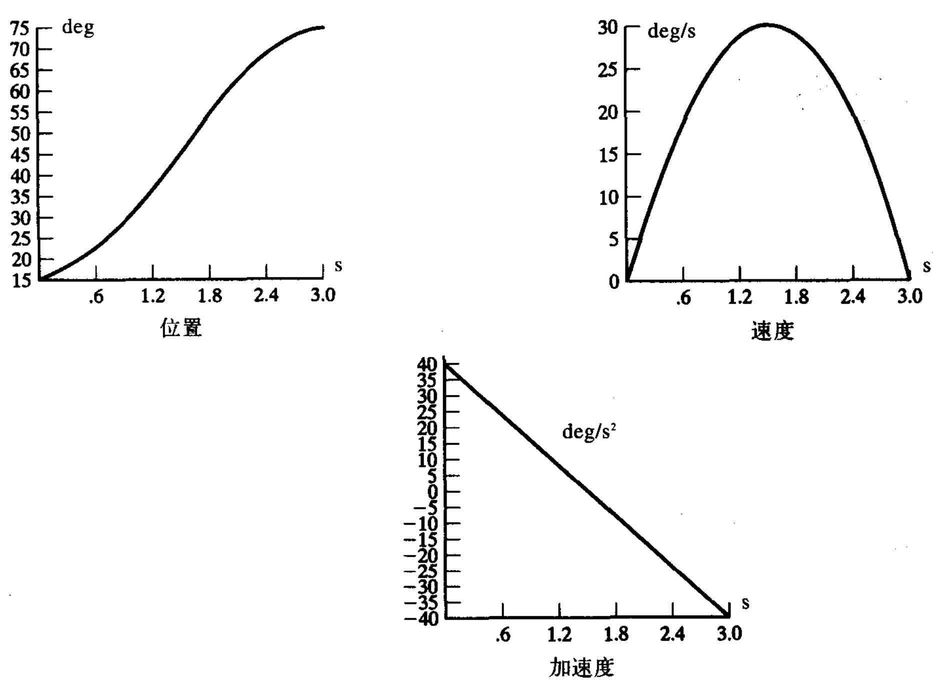


图7-3 一个三次曲线段的位置、速度和加速度曲线图，起始和终止时均为静止

通常，操作臂需要连续经过每个中间点，所以应该归纳出一种能够使三次多项式满足路径约束条件的方法。

与单目标点的情形类似，每个中间点通常是用工具坐标系相对于工作台坐标系的期望位姿来确定的。应用逆运动学把每个中间点"转换"成一组期望的关节角。然后，考虑对每个关节求出平滑连接每个中间点的三次多项式。

如果已知各关节在中间点的期望速度，那么就可像前面一样构造出三次多项式；但是，这时在每个终止点的速度约束条件不再为零，而是已知的速度。于是，式（7-3）的约束条件变成：

$$\begin{aligned}\dot{\theta}(0)&=\dot{\theta}_0\\ \dot{\theta}(t_f)&=\dot{\theta}_f\end{aligned} \tag{7-9}$$ 205~206

描述这个一般三次多项式的四个方程为：

$$\begin{aligned}\theta_0&=a_0\\ \theta_f&=a_0+a_1t_f+a_2t_f^2+a_3t_f^3\\ \dot{\theta}_0&=a_1\\ \dot{\theta}_f&=a_1+2a_2t_f+3a_3t_f^2\end{aligned} \tag{7-10}$$

求解方程组中的a_i，可以得到

$$\begin{aligned}a_0&=\theta_0\\ a_1&=\dot{\theta}_0\\ a_2&=\frac{3}{t_f^2}(\theta_f-\theta_0)-\frac{2}{t_f}\dot{\theta}_0-\frac{1}{t_f}\dot{\theta}_f\\ a_3&=-\frac{2}{t_f^3}(\theta_f-\theta_0)+\frac{1}{t_f^2}(\dot{\theta}_f+\dot{\theta}_0)\end{aligned} \tag{7-11}$$

应用式（7-11），可求出符合任何起始和终止位置以及任何起始和终止速度的三次多项式。

如果在每个中间点处均有期望的关节速度，那么可以简单地将式（7-11）应用到每个曲线段来求出所需的三次多项式。确定中间点处的期望关节速度可以使用以下几种方法：

1. 根据工具坐标系的笛卡儿线速度和角速度确定每个中间点的瞬时期望速度。
2. 在笛卡儿空间或关节空间使用适当的启发式方法，系统自动选取中间点的速度。
3. 采用使中间点处的加速度连续的方法，系统自动选取中间点的速度。

第一种方法，利用在中间点上计算出的操作臂的雅克比逆矩阵，把中间点的笛卡儿期望速度"映射"为期望的关节速度。如果操作臂在某个特定的中间点上处于奇异位置，则用户将无法在该点处任意指定速度。对于一个路径生成算法而言，其用处之一就是满足用户指定的期望速度。然而，总是要求用户指定速度也是一个负担。因此，一个方便的路径规划系统还应包括方法2或3（或者二者兼而有之）。

第二种方法，系统使用一些启发式方法来自动地选择合理的中间点速度。图7-4所示为由中间点确定的某一关节θ的路径的方法。

在图7-4中，已经合理选取了各中间点上的关节速度，并用短直线来表示，这些短直线即为曲线在每个中间点处的切线。这种选取结果是通过使用了概念和计算方法都很简单的启发式方法而得到的。假设用直线段把中间点连接起来。如果这些直线的斜率在中间点处改变符 207

号，则把速度选定为零；如果这些直线的斜率没有改变符号，则选取两斜率的平均值作为该点的速度。这样，系统可以只根据规定的期望中间点，来选取每个中间点的速度。

第三种方法，系统根据中间点处的加速度为连续的原则选取各点的速度。为此，需要一种新的方法。在这种样条曲线中设置一组数据，在两条三次曲线的连接点处，用速度和加速度均为连续的约束条件替换两个速度约束条件。⊖

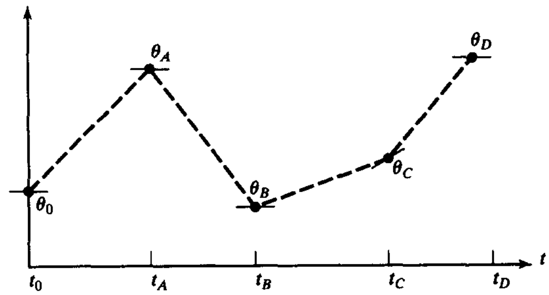


图7-4 有切线标记的点为期望速度的中间点

例7.2

试求解两个三次曲线的系数，使得两线段连成的样条曲线在中间点处具有连续的加速度。假设起始角为θ_0，中间点为θ_v，目标点为θ_g。

第一个三次曲线为

$$\theta(t)=a_{10}+a_{11}t+a_{12}t^2+a_{13}t^2 \tag{7-12}$$

第二个三次曲线为

$$\theta(t)=a_{20}+a_{21}t+a_{22}t^2+a_{23}t^3 \tag{7-13}$$

在一个时间段内，每个三次曲线的起始时刻为$t=0$，终止时刻$t=t_{fi}$，其中$i=1$或$i=2$。

施加的约束条件为

$$\begin{aligned}
\theta_0 &= a_{10} \\
\theta_v &= a_{10}+a_{11}t_{f1}+a_{12}t_{f1}^2+a_{13}t_{f1}^3 \\
\theta_v &= a_{20} \\
\theta_g &= a_{20}+a_{21}t_{f2}+a_{22}t_{f2}^2+a_{23}t_{f2}^3 \\
0 &= a_{11} \\
0 &= a_{21}+2a_{22}t_{f2}+3a_{23}t_{f2}^2 \\
a_{11}+2a_{12}t_{f1}+3a_{12}t_{f1}^2 &= a_{21} \\
2a_{12}+6a_{13}t_{f1} &= 2a_{22}
\end{aligned} \tag{7-14}$$

208

这些约束条件确定了一个具有8个方程和8个未知数的线性方程组。当$t_f=t_{f1}=t_{f2}$时可以得到

⊖ 在这里，术语“样条曲线”只是意味着随时间变化的函数曲线。

$$
\begin{aligned}
a_{10} &= \theta_0 \\
a_{11} &= 0 \\
a_{12} &= \frac{12\theta_\upsilon - 3\theta_g - 9\theta_0}{4t_f^2} \\
a_{13} &= \frac{-8\theta_\upsilon + 3\theta_g + 5\theta_0}{4t_f^3} \\
a_{20} &= \theta_\upsilon \\
a_{21} &= \frac{3\theta_g - 3\theta_0}{4t_f} \\
a_{22} &= \frac{-12\theta_\upsilon + 6\theta_g + 6\theta_0}{4t_f^2} \\
a_{23} &= \frac{8\theta_\upsilon - 5\theta_g - 3\theta_0}{4t_f^3}
\end{aligned}
\tag{7-15}
$$

■

一般情况下，对于包含n个三次曲线段的轨迹来说，当满足中间点处加速度为连续时，其方程组可以写成矩阵形式，可用来求解中间点的速度。该矩阵为三角阵，易于求解[4]。

高阶多项式

有时用高阶多项式作为路径段。例如，如果要确定路径段起始点和终止点的位置、速度和加速度，则需要用一个五次多项式进行插值，即

$$
\theta(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5 \tag{7-16}
$$

其约束条件为

$$
\begin{aligned}
\theta_0 &= a_0 \\
\theta_f &= a_0 + a_1 t_f + a_2 t_f^2 + a_3 t_f^3 + a_4 t_f^4 + a_5 t_f^5 \\
\dot{\theta}_0 &= a_1 \\
\dot{\theta}_f &= a_1 + 2a_2 t_f + 3a_3 t_f^2 + 4a_4 t_f^3 + 5a_5 t_f^4 \\
\ddot{\theta}_0 &= 2a_2 \\
\ddot{\theta}_f &= 2a_2 + 6a_3 t_f + 12a_4 t_f^2 + 20a_5 t_f^3
\end{aligned}
\tag{7-17}
$$

209

这些约束条件确定了一个具有6个方程和6个未知数的线性方程组，其解为

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \theta_0 \\
a_1 &= \dot{\theta}_0 \\
a_2 &= \frac{\ddot{\theta}_0}{2} \\
a_3 &= \frac{20\theta_f - 20\theta_0 - (8\dot{\theta}_f + 12\dot{\theta}_0)t_f - (3\ddot{\theta}_0 - \ddot{\theta}_f)t_f^2}{2t_f^3}
\end{aligned}
\tag{7-18}
$$

$$a_4 = \frac{30\theta_0 - 30\theta_f + (14\dot{\theta}_f + 16\dot{\theta}_0)t_f + (3\ddot{\theta}_0 - 2\ddot{\theta}_f)t_f^2}{2t_f^4}$$

$$a_5 = \frac{12\theta_f - 12\theta_0 - (6\dot{\theta}_f + 6\dot{\theta}_0)t_f - (\ddot{\theta}_0 - \ddot{\theta}_f)t_f^2}{2t_f^5} \tag{7-18'}$$

对于一个途经多个给定数据点的轨迹来说，可用多种算法来求解描述该轨迹的光滑函数（多项式或其他函数）[3, 4]。在本书中，将不对此进行介绍。

与抛物线拟合的线性函数

另外一种可选的路径形状是直线。即：简单地从当前的关节位置进行线性插值，直到终止位置，如图7-5所示。请记住，尽管在该方法中各关节的运动是线性的，但是末端执行器在空间的运动轨迹一般不是直线。

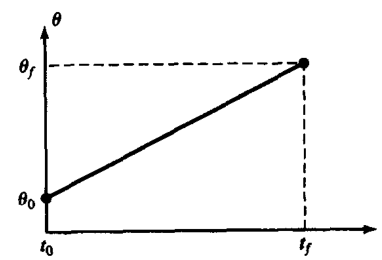


图7-5 线性插值要求加速度无穷大

然而，直接进行线性插值将导致在起始点和终止点的关节运动速度不连续。为了生成一条位置和速度都连续的平滑运动轨迹，开始先用线性函数，但需在每个路径点增加一段抛物线拟合区域。

在运动轨迹的拟合区段内，将使用恒定的加速度平滑地改变速度。图7-6所示为使用这种方法构造的简单路径。直线函数和两个抛物线函数组合成一条完整的位置与速度均连续的路径。

为了构造这样的路径段，假设两端的抛物线拟合区段具有相同的持续时间；因此在这两个拟合区段中采用相同的恒定加速度（符号相反）。如图7-7所示，这里存在有多个解，但是每个结果都对称于时间中点t_h和位置中点θ_h。由于拟合区段终点的速度必须等于直线段的速度，所以有

$$\ddot{\theta}t_b = \frac{\theta_h - \theta_b}{t_h - t_b} \tag{7-19}$$

式中，θ_b是拟合段终点的θ值，而$\ddot{\theta}$是拟合区段的加速度。θ_b的值由

$$\theta_b = \theta_0 + \frac{1}{2}\ddot{\theta}t_b^2 \tag{7-20}$$

给出。

联立式（7-19）和式（7-20），且$t=2t_h$，可以得到

$$\ddot{\theta}t_b^2 - \ddot{\theta}tt_b + (\theta_f - \theta_0) = 0 \tag{7-21}$$

式中，t是期望的运动时间。对于任意给定的θ_f，θ_0和t，可通过选取满足式（7-21）的$\ddot{\theta}$和t_b来获得任意一条路径。通常，先选择加速度$\ddot{\theta}$，再计算式（7-21），求解出相应的t_b。选择的加速度必须足够大，否则解将不存在。根据加速度和其他已知参数计算式（7-21），

求解t_b：

$$t_b=\frac{t}{2}-\frac{\sqrt{\ddot{\theta}^2t^2-4\ddot{\theta}(\theta_f-\theta_0)}}{2\ddot{\theta}} \tag{7-22}$$

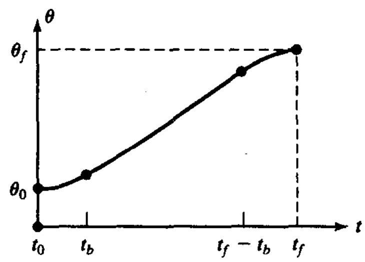


图7-6 带有抛物线拟合的直线段

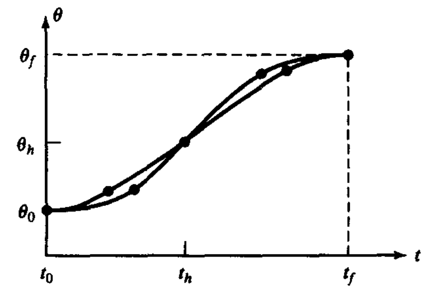


图7-7 带有抛物线拟合的直线段

在拟合区段使用的加速度约束条件为

$$\ddot{\theta}\geqslant\frac{4(\theta_f-\theta_0)}{t^2} \tag{7-23}$$

当式（7-23）的等号成立时，直线部分的长度缩减为零，整个路径由两个拟合区段组成，且衔接处的斜率相等。如果加速度的取值越来越大，则拟合区段的长度将随之越来越短。当处于极限状态时，即：加速度无穷大，路径又回复到简单的线性插值情况。

例7.3

与例7.1中讨论的单段路径相同，这里给出两个带有抛物线拟合的直线路径例子。

图7-8(a)中，加速度$\ddot{\theta}$的值选得较大。在这种情况下，关节迅速加速，然后转为匀速运动，最后减速。图7-8(b)所示的轨迹，由于所选的加速度$\ddot{\theta}$相当小，以致直线区段几乎消失了。

具有中间点的路径与抛物线拟合的线性函数

现在讨论带有抛物线拟合的直线路径，路径上指定了任意数量的中间点。图7-9所示，为某个关节θ在关节空间的一组中间点，中间点之间使用线性函数相连，而各中间点附近使用抛物线拟合。

在这里将使用如下符号：用j, k和l表示三个相邻的路径点，位于路径点k处的拟合区段的时间间隔为t_k，位于点j和k之间的直线段的时间间隔为t_{jk}，点j和k之间总的时间间隔为t_{djk}。直线段的速度为$\ddot{\theta}_{jk}$，而在点j处拟合区段的加速度为$\ddot{\theta}_j$，如图7-9所示。

与单段路径的情形相似，存在许多可能解，这取决于每个拟合区段的加速度值。已知所有的路径点θ_k、期望的时间间隔t_{djk}以及每个路径点处加速度的大小为$|\ddot{\theta}_k|$，则可计算出拟合区段的时间间隔t_k。对于那些内部的路径点，可直接使用下列公式计算： 210~212

$$
\begin{aligned}
\dot{\theta}_{jk} &= \frac{\theta_k - \theta_j}{t_{djk}} \\
\ddot{\theta}_k &= SGN(\dot{\theta}_{kl} - \dot{\theta}_{jk})|\ddot{\theta}_k| \\
t_k &= \frac{\dot{\theta}_{kl} - \dot{\theta}_{jk}}{\ddot{\theta}_k} \\
t_{jk} &= t_{djk} - \frac{1}{2}t_j - \frac{1}{2}t_k
\end{aligned} \tag{7-24}
$$

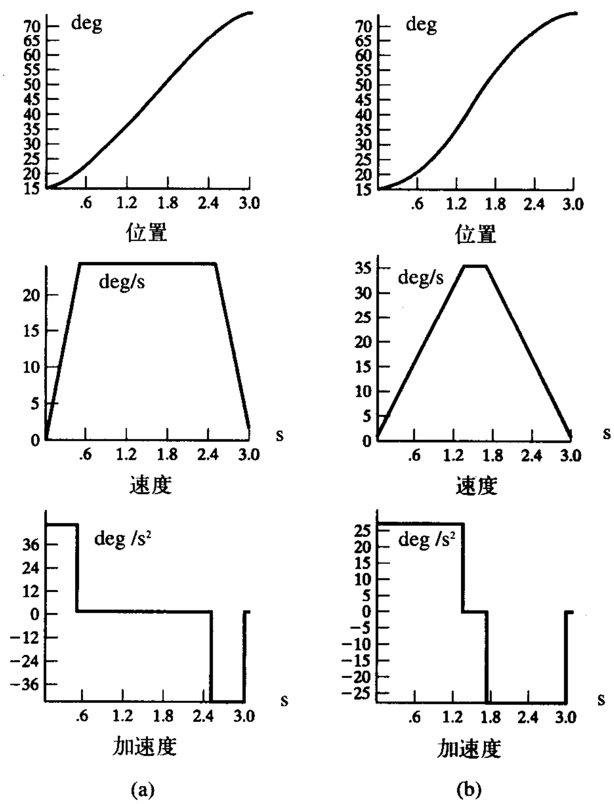


图7-8 带有抛物线拟合的线性插值的位置、速度和加速度曲线，左边的一组曲线在拟合区段处的加速度高于右边的曲线

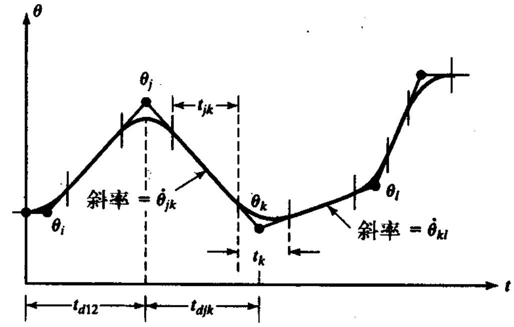


图7-9 多段带有拟合区段的直线路径

但是，对于第一个路径段和最后一个路径段的处理上稍有不同，因为路段末端的整个拟合区段都必须计入到总路径段的时间间隔中。

对于第一个路径段，令线性区段速度的两个速度表达式相等来求解t_1:

$$\frac{\theta_2-\theta_1}{t_{12}-\frac{1}{2}t_1}=\ddot{\theta}_1 t_1 \tag{7-25}$$

由此可解出起始点处的拟合时间t_1，然后容易解出$\dot{\theta}_{12}$和t_{12}:

$$\begin{aligned}
\ddot{\theta}_1 &= SGN(\theta_2-\theta_1)|\ddot{\theta}_1| \\
t_1 &= t_{d12}-\sqrt{t_{d12}^2-\frac{2(\theta_2-\theta_1)}{\ddot{\theta}_1}} \\
\dot{\theta}_{12} &= \frac{\theta_2-\theta_1}{t_{d12}-\frac{1}{2}t_1} \\
t_{12} &= t_{d12}-t_1-\frac{1}{2}t_2
\end{aligned} \tag{7-26}$$

同样，对于最后一个路径段（连接点$n-1$到n），有:

$$\frac{\theta_{n-1}-\theta_n}{t_{d(n-1)n}-\frac{1}{2}t_n}=\ddot{\theta}_n t_n \tag{7-27}$$

根据上式可求出

$$\begin{aligned}
\ddot{\theta}_n &= SGN(\theta_{n-1}-\theta_n)|\ddot{\theta}_n| \\
t_n &= t_{d(n-1)n}-\sqrt{t_{d(n-1)n}^2+\frac{2(\theta_n-\theta_{n-1})}{\ddot{\theta}_n}} \\
\dot{\theta}_{(n-1)n} &= \frac{\theta_n-\theta_{n-1}}{t_{d(n-1)n}-\frac{1}{2}t_n} \\
t_{(n-1)n} &= t_{d(n-1)n}-t_n-\frac{1}{2}t_{n-1}
\end{aligned} \tag{7-28}$$

213~214

式（7-24）~式（7-28）可用来求出多段轨迹中各个拟合区段的时间和速度。通常用户只需给定中间点以及各个路径段的持续时间。在这种情况下，系统使用各个关节的默认加速度值。有时，为了方便用户起见，系统还可按照默认的速度来计算持续时间。对于各个拟合区段，加速度值必须取得足够大，以便在下一个拟合区段开始之前有足够的时间进入直线区段。

例7.4

定义某个关节的轨迹，用“deg”为单位表示各路径点：10，35，25，10。三个路径段的时间间隔分别为2s、1s和3s。所有拟合点处的默认加速度的绝对值为50deg/s²。计算各路径段的速度、拟合区段的持续时间和直线区段的持续时间。

对第一个曲线段，利用式（7-26）得到

$$\ddot{\theta}_1=50.0 \tag{7-29}$$

利用式（7-26）求出起始点处拟合区段的持续时间，得到

$$t_1 = 2 - \sqrt{4 - \frac{2(35-10)}{50.0}} = 0.27 \tag{7-30}$$

由式（7-26）求出速度 $\dot{\theta}_{12}$

$$\dot{\theta}_{12} = \frac{35-10}{2-0.5(0.27)} = 13.50 \tag{7-31}$$

由式（7-24）求出速度 $\dot{\theta}_{23}$，

$$\dot{\theta}_{23} = \frac{25-35}{1} = -10.0 \tag{7-32}$$

然后由式（7-24）得到

$$\ddot{\theta}_2 = -50.0 \tag{7-33}$$

再由式（7-24）求出t_2，得到

$$t_2 = \frac{-10.0-13.50}{-50.0} = 0.47 \tag{7-34}$$

由式（7-26）求出路径段1的直线区段的持续时间长度：

$$t_{12} = 2 - 0.27 - \frac{1}{2}(0.47) = 1.50 \tag{7-35}$$

然后，由式（7-29）得到

215

$$\ddot{\theta}_4 = 50.0 \tag{7-36}$$

于是，对于最末路径段，利用式（7-28）求出t_4，得到

$$t_4 = 3 - \sqrt{9 + \frac{2(10-25)}{50.0}} = 0.102 \tag{7-37}$$

由式（7-28）求出速度 $\dot{\theta}_{34}$

$$\dot{\theta}_{34} = \frac{10-25}{3-0.050} = -5.10 \tag{7-38}$$

然后，应用式（7-24）得到

$$\ddot{\theta}_3 = 50.0 \tag{7-39}$$

从式（7-24）解出t_3：

$$t_3 = \frac{-5.10-(-10.0)}{50} = 0.098 \tag{7-40}$$

最后，由式（7-24）得到

$$t_{23} = 1 - \frac{1}{2}(0.47) - \frac{1}{2}(0.098) = 0.716 \tag{7-41}$$

$$t_{34} = 3 - \frac{1}{2}(0.098) - 0.012 = 2.849 \tag{7-42}$$

以上给出了轨迹"规划"的计算结果。在执行过程中，**路径生成器**利用这些数据按照轨迹更新速率求出θ，$\dot{\theta}$ 和$\ddot{\theta}$ 。

■

值得注意的是，多段带有抛物线拟合的直线样条曲线实际并没有经过那些中间点，除非操作臂在这些中间点处停留。通常，如果选取的加速度足够大，则实际路径将与期望的中间点非常接近。如果希望操作臂途经并停留在某个中间点，只需要在路径中重复定义这个路径点即可。

如果用户希望操作臂精确地经过某个中间点而不停留，则仍可采用前面相同的计算公式，但需要做以下补充：系统将操作臂希望经过的中间点自动替换为位于其两侧的两个伪中间点（如图7-10所示）。然后利用前面的办法生成路径。原来的中间点将位于连接两个伪中间点的直线段上。除了要求操作臂精确地经过中间点之外，用户还可以要求操作臂按一定的速度经过该中间点。如果用户没有规定速度，系统就使用适当的启发式方法选定速度。术语**经过点**（而不是"中间点"）被用来定义强迫操作臂准确经过的路径点。

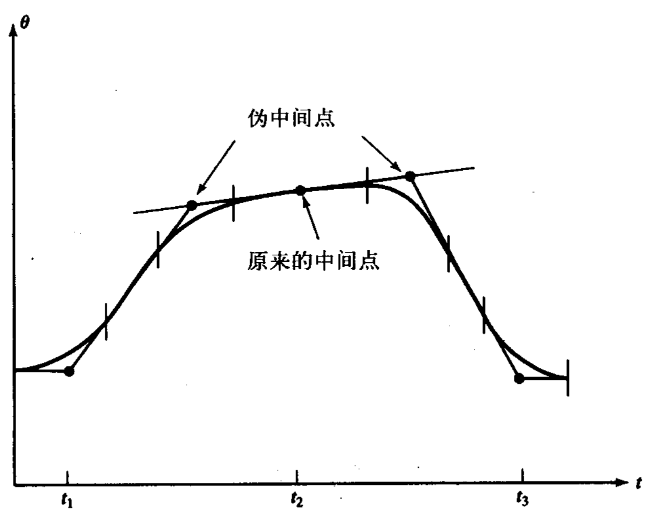


图7-10 用伪中间点来产生一个"经过点"

7.4 笛卡儿空间规划方法

如同7.3节所述，在关节空间中计算出的路径可保证操作臂能够到达中间点和目标点，即使这些路径点是用笛卡儿坐标系来规定的。不过，末端执行器在空间的路径不是直线，而且，其路径的复杂程度取决于操作臂特定的运动学特性。在本节讨论的路径生成方法是用笛卡儿位姿关于时间的函数来描述路径形状。此方法可以确定路径点之间的空间路径形状。最常见的路径形状是直线，不过也会使用圆、正弦或其他路径形状。

每个路径点通常由工具坐标系相对于工作台坐标系的期望位姿来确定。在基于笛卡儿空间的路径规划方法中，形成轨迹的样条函数是描述笛卡儿变量的随时间变化的函数。这些路径可直接根据用户指定的路径点进行规划，这些路径点是由$\{T\}$相对于$\{S\}$来描述的，无需事先进行逆运动学求解。可是，执行笛卡儿规划的计算量很大，因为在运行时必须以实时更新路径的速度求出运动学逆解——即在笛卡儿空间生成路径后，最后一步要通过求解逆运动学

计算出期望的关节角度。

在工业机器人研究协会（the research and industrial robotics community）的文献[1，2]中已提出了几种生成笛卡儿路径的规划方法。作为示例，下节将介绍一种方法。在这个规划方法中，将用到前面介绍过的关节空间的直线/抛物线样条函数方法。

笛卡儿直线运动

216~217 通常，希望能够简单地确定空间路径，使工具的末端在空间作直线运动。显然，如果在一条直线上密集地指定许多分离的中间点，那么不管在中间点之间使用何种光滑函数进行连接，工具末端都走直线。但是，如果能让工具在相隔较远的中间点之间走直线路径，则会更为方便一些。这种定义和执行路径的模式被称作**笛卡儿直线运动**。使用直线来定义运动是更为一般意义上的**笛卡儿运动**的子集。在笛卡儿运动中，可以使用笛卡儿变量关于时间的任意函数来定义路径。能完成一般笛卡儿运动的系统，可以执行诸如椭圆或正弦的路径形状。

在规划和生成笛卡儿直线路径时，最好使用带有抛物线拟合的直线样条函数。在每段的直线部分，位置的三个分量都以线性方式发生变化，所以末端执行器会沿着直线路径在空间运动。然而，如果在每个中间点将姿态定义成旋转矩阵，则无法对其分量进行线性插值，因为这样做不一定总能得到有效的旋转矩阵。一个旋转矩阵必须是由正交列向量组成，而在两个有效的矩阵之间对矩阵元素进行线性插值并不能保证满足这个条件。因此，可以使用另一种姿态的表示方法。

如第2章所述，使用轴角坐标系表示方法可以只需三个参数来定义姿态。如果把这种姿态的表示方法与3 × 1的笛卡儿位置表示方法相结合，就可得到6 × 1的笛卡儿位置与姿态的表示方法。考虑一个中间点，其相对于工作台坐标系的定义为 ${}^S_AT$ 。坐标系$\{A\}$定义了一个中间点，在该点处末端执行器的位置由 ${}^SP_{AORG}$ 给定，姿态由 ${}^S_AR$ 给定。该旋转矩阵可被转换成轴角坐标系的表示 $ROT({}^S\hat{K}_A,\theta_{SA})$ ——或简写成 ${}^SK_A$ 。这里使用符号χ代表该6 × 1的笛卡儿位置与姿态矢量。于是，得到:

$$
{}^S\chi_A=\begin{bmatrix}{}^SP_{AORG}\\ {}^SK_A\end{bmatrix} \tag{7-43}
$$

式中，${}^SK_A$ 为转动量θ_{SA}与单位矢量 ${}^S\hat{K}_A$ 相乘。如果每个路径点均使用这种方法来表示，那么就可以选择适当的样条函数，使这六个分量随时间从一个路径点平滑地移动到下一个路径点。如果采用带有抛物线拟合的直线函数，那么中间点之间的路径则为直线。当通过中间点时，末端执行器的线速度与角速度将作平滑地变化。

注意，此法与其他笛卡儿-直线-运动规划方法不同，当从一点运动到另一点时，此法不能保证只绕一个“等效轴”旋转。相反，该方法只是能够得到姿态的平滑变化以及可以应用前面介绍过的同样的关节空间轨迹规划的插值方法。

另外需要说明的是，姿态的轴角坐标系表示方法并不唯一，即

218
$$
({}^S\hat{K}_A,\theta_{SA})=({}^S\hat{K}_A,\theta_{SA}+n360^\circ) \tag{7-44}
$$

式中，n为任意的正整数或负整数。当操作臂从中间点$\{A\}$运动到中间点$\{B\}$时，总的转动量应取最小值。如果$\{A\}$的姿态由 ${}^SK_A$ 给出，则必须选择特定的 ${}^SK_B$ 使得 $\left|{}^SK_B-{}^SK_A\right|$ 最小。例如，图7-11所示为四个可能的 ${}^SK_B$ 及其与给定的 ${}^SK_A$ 之间的关系。通过对矢量（虚线）长度的差

别进行比较，从而判断哪个 ${}^{S}K_B$ 会使转动量最小——在此例中，是 ${}^{S}K_{B(-1)}$ 。

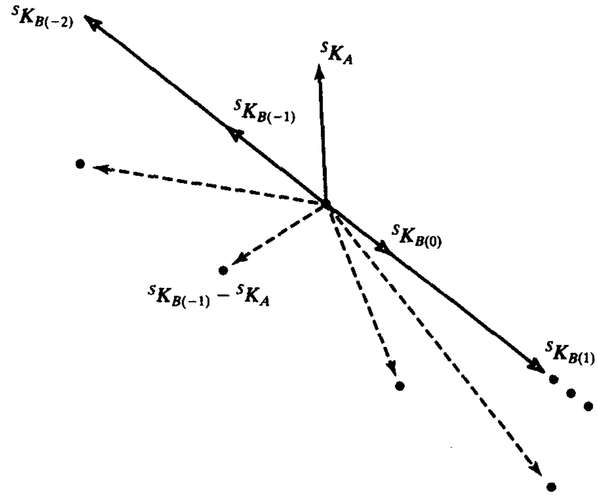


图7-11 选用轴角坐标系表示法使转动最小

一旦对每个中间点选定了χ的6个值，就可使用前面介绍的用直线和抛物线组合的样条函数进行路径规划。但是要附加一个约束条件：每个自由度的拟合时间必须是相同的，这样才能保证各自由度形成的复合运动在空间是一条直线。因为各自由度的拟合时间相同，所以在拟合区段的加速度便不相同。因此，在指定拟合区段的时间间隔时，应该使用式（7-24）计算所需要的加速度（而不使用其他方法）。可以通过选择适当的拟合时间以使加速度不超过上限。

还可以使用许多其他对笛卡儿路径的姿态进行描述和插值的方法。其中，可以使用2.8节介绍的3 × 1姿态表示法。例如，某些工业机器人使用与Z-Y-Z欧拉角相似的表示方法对姿态进行插值，以使机器人沿笛卡儿直线路径运动。

7.5 笛卡儿路径的几何问题

由于笛卡儿空间描述的路径形状与关节位置之间有连续的对应关系，所以笛卡儿空间的路径容易出现与工作空间和奇异点有关的各种问题。 219

问题之一：不可达的中间点

尽管操作臂的起始点和目标点都在其工作空间内部，但是很有可能在连接这两点的直线上有某些点不在工作空间中，例如图7-12所示的平面两杆机器人及其工作空间。在此例中，连杆2比连杆1短，所以在工作空间的中间存在一个空洞，其半径为两连杆长度之差。起始点A和目标点B均在工作空间中，在关节空间中从A运动到B没有问题。但是如果试图在笛卡儿空间沿直线运动，将无法到达路径上的某些中间点。该例表明了在某些情况下，关节空间中的路径容易实现，而笛卡儿空间中的直线路径将无法实现[⊖]。

⊖ 有些机器人系统在移动操作臂之前提前通知用户可能发生的问题，而对于另外一些机器人系统来说，操作臂沿着路径开始运动直到某些关节达到了极限位置时，操作臂的运动才会停止。

问题之二：在奇异点附近的高关节速率

从第5章可以看到，在操作臂的工作空间中存在着某些位置，在这些位置处无法用有限的关节速度来实现末端执行器在笛卡儿空间的期望速度。因此，有某些路径（在笛卡儿空间描述）是操作臂所无法执行的，这一点并不奇怪。例如，如果一个操作臂沿笛卡儿直线路径接近机构的一个奇异位形时，则机器人的一个或多个关节速度可能增加至无穷大。由于机构的速度是有上限的，因此这通常将导致操作臂偏离期望的路径。

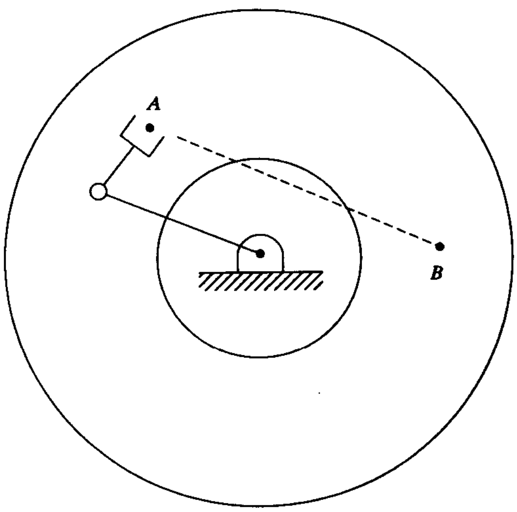


图7-12 笛卡儿路径问题之一

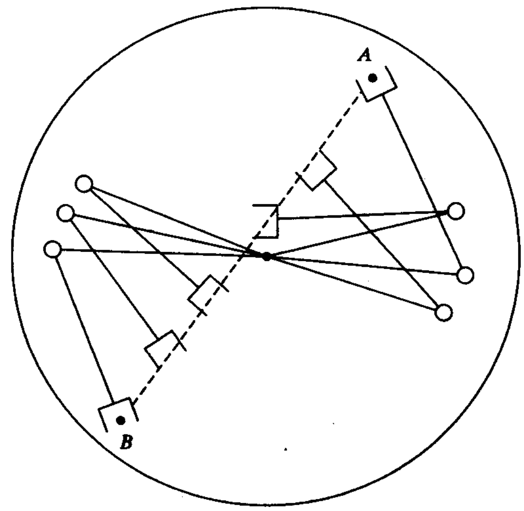


图7-13 笛卡儿路径问题之二

例如，图7-13给出了一个平面两杆（两杆长度相同）操作臂，从A点沿着路径运动到B点。期望轨迹是使操作臂末端以恒定的线速度作直线运动。图中画出了操作臂在运动过程中的一些中间位置以便于观察其运动。可以看到，路径上的所有点都可以到达，但是当机器人经过路径的中间部分时，关节1的速度非常高。路径越接近关节1的轴线，关节1的速度就越大。一个解决办法是减小这个路径上的所有运动速度，以使所有关节速度在其容许范围内。虽然这样可能不能保证路径上的瞬时特性，但是至少由路径定义的空间点都能够达到。

问题之三：不同解下的可达起点和终点

图7-14可以说明第三类问题。在这里，平面两杆操作臂的两个杆长度相等，但是关节存在约束，这使机器人到达空间给定点的解的数量减少。尤其是当操作臂不能使用与起始点相同的解到达终点时，就会出现问题。如图7-14所示，某些解可以使操作臂到达所有的路径点，但并非任何解都可以到达。这样，操作臂的转

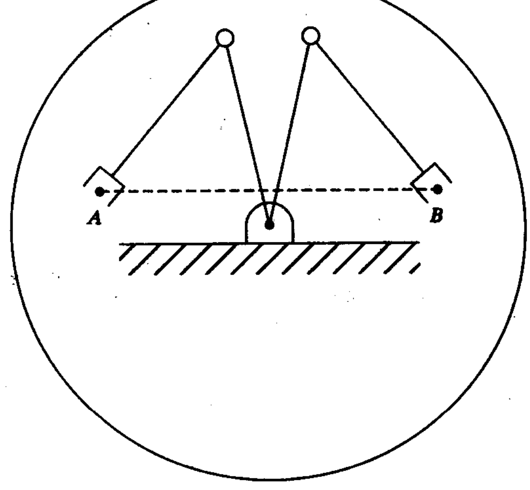


图7-14 笛卡儿路径问题之三

迹规划系统可以使机器人无需沿路径运动就能检测到这种问题，并向用户报错。

为了处理在笛卡儿空间定义路径存在的这些问题，大多数工业操作臂控制系统都具有关节空间和笛卡儿空间的路径生成功能。用户很快可明白由于使用笛卡儿空间路径存在一定困难，所以一般默认使用关节空间路径。只有在必要时，才使用笛卡儿空间的路径规划方法。

7.6 路径的实时生成

在实时运行时，路径生成器不断生成用θ，$\dot{\theta}$和$\ddot{\theta}$构造的轨迹，并且将此信息传送至操作臂的控制系统。路径生成器以一定的路径更新率进行轨迹计算。

关节空间路径的生成

按照7.3节介绍的几种样条拟合方法生成的路径，其结果都是有关各个路径段的一组数据。这些数据被路径生成器用来实时计算θ，$\dot{\theta}$和$\ddot{\theta}$。

对于三次样条曲线，路径生成器只需随t的变化不断计算式（7-3）。当到达路径段的终点时，调用新路径段的三次样条系数，重新把t置成零，继续生成路径。

对于带抛物线拟合的直线样条曲线，每次更新轨迹时，应首先检测时间t的值，以判断当前是处在路径段的直线区段还是抛物线拟合区段。在直线区段，对每个关节的轨迹计算如下：

$$\begin{aligned}\theta &= \theta_j + \dot{\theta}_{jk} t \\ \dot{\theta} &= \dot{\theta}_{jk} \\ \ddot{\theta} &= 0\end{aligned} \tag{7-45}$$ 220~222

式中，t是自第j个中间点算起的时间，$\dot{\theta}_{jk}$的值在路径规划时按式（7-24）计算。在拟合区段，对各关节的轨迹计算如下：

$$\begin{aligned}t_{inb} &= t - (\frac{1}{2}t_j + t_{jk}) \\ \theta &= \theta_j + \dot{\theta}_{jk}(t - t_{inb}) + \frac{1}{2}\ddot{\theta}_k t_{inb}^2 \\ \dot{\theta} &= \dot{\theta}_{jk} + \ddot{\theta}_k t_{inb} \\ \ddot{\theta} &= \ddot{\theta}_k\end{aligned} \tag{7-46}$$

式中，$\dot{\theta}_{jk}, \ddot{\theta}_k, t_j$和$t_{jk}$在路径规划时根据式（7-24）～（7-28）计算。当进入一个新的直线区段时，将t重置成$\frac{1}{2}t_k$，继续计算，直到计算出所有表示路径段的数据集合。

笛卡儿空间路径的生成

在7.4节中已经介绍了笛卡儿空间路径规划方法，使用路径生成器生成带有抛物线拟合的直线样条曲线。但是，计算得到的数值表示的是笛卡儿空间的位置和姿态而不是关节变量值，所以这里使用符号x来表示笛卡儿位姿矢量的一个分量，并重写式（7-45）和式（7-46）。在曲线的直线区段，x中的每个自由度按下式计算：

$$x = x_j + \dot{x}_{jk} t$$
$$\dot{x} = \dot{x}_{jk} \tag{7-47}$$
$$\ddot{x} = 0$$

式中，t是自第j个中间点算起的时间，而 $\dot{x}_{jk}$ 是在路径规划时由类似于式（7-24）的方程求出的。在拟合区段中，每个自由度的轨迹计算如下：

$$t_{inb} = t - (\frac{1}{2}t_j + t_{jk})$$
$$x = x_j + \dot{x}_{jk}(t - t_{inb}) + \frac{1}{2}\ddot{x}_k t_{inb}^2$$
$$\dot{x} = \dot{x}_{jk} + \ddot{x}_k t_{inb} \tag{7-48}$$
$$\ddot{x} = \ddot{x}_k$$

式中，$\dot{x}_{jk}, \ddot{x}_k, t_j$ 和 t_{jk} 的值在路径规划时计算出，与关节空间的情况完全相同。

最后，这些笛卡儿空间的轨迹 $(\chi, \dot{\chi}, \ddot{\chi})$ 必须变换为等效的关节空间的变量。此问题的完整解析解应使用逆运动学计算关节的位置。用逆雅克比矩阵计算关节速度，用逆雅克比矩阵及其导数计算角加速度[5]。在实际中经常使用的简单方法为：根据路径更新率，将χ变换为等效的坐标系 ${}^S_GT$ 表示。使用SOLVE算法（见4.8节）求出所需的关节角矢量Θ。然后用数值微分计算出 $\dot{\Theta}$和 $\ddot{\Theta}$ ⊖。于是，算法为

223

$$\chi \to {}^S_GT$$
$$\Theta(t) = SOLVE({}^S_GT)$$
$$\dot{\Theta}(t) = \frac{\Theta(t) - \Theta(t - \delta t)}{\delta t} \tag{7-49}$$
$$\ddot{\Theta}(t) = \frac{\dot{\Theta}(t) - \dot{\Theta}(t - \delta t)}{\delta t}$$

然后把 $\Theta, \dot{\Theta}, \ddot{\Theta}$ 输入给操作臂的控制系统。

7.7 使用机器人编程语言描述路径

在第12章将进一步讨论机器人编程语言。在此只说明在本章讨论的多种路径如何用机器人编程语言定义。在这些例子中，将使用AL语言，一种由斯坦福大学开发的机器人编程语言[6]。

在下列AL语言示例中，符号A、B、C、D表示与“坐标系”有关的变量，它们代表路径点，假定这些路径点已被示教或通过文本输进了系统。假定操作臂从位置A开始运动，在关节空间使操作臂沿着带有抛物线拟合的直线路径运动，可以写入

```
move ARM to C with duration = 3*seconds;
```

以直线移动到相同的位置和姿态，可以写入

⊖ 在路径规划时对 $\dot{\Theta}$ 和 $\ddot{\Theta}$ 不加区别地进行计算，当然可以得到所有的 $\dot{\Theta}$ 和 $\ddot{\Theta}$ 的解。然而，许多机器人控制系统并不需要输入 $\ddot{\Theta}$，因此可不必对 $\ddot{\Theta}$ 进行计算。

```
move ARM to C linearly with duration = 3*seconds;
```

其中，关键词“linearly”表示使用笛卡儿直线运动。如果时间间隔并不重要的话，用户可忽略此定义，而系统将采用默认的速度——即

```
move ARM to C;
```

如果加入一个中间点，则可写为

```
move ARM to C via B;
```

或者加入一组中间点，则可写为

```
move ARM to C via B,A,D;
```

注意，在

```
move ARM to C via B with duration = 6*seconds;
```

中给出了整个运动的时间间隔。系统自行决定如何在这个运动的时间间隔中分配直线和抛物线区段的时间。在AL语言中，可以为某个区段单独指定时间间隔——例如，

```
move ARM to C via B where duration = 3*seconds;
```

这样，向B点运动的第一个区段的时间间隔为3s。

7.8 使用动力学模型的路径规划

通常，在规划路径时，在每个拟合点处使用默认的或最大的加速度。实际上，操作臂在任何时刻加速度的大小是其动力学和驱动器移动范围的函数。大多数驱动器的特征并不是由固定的最大力矩或加速度来描述的，而是由它的力矩-速度曲线来描述的。 224

在规划路径时，如果假定在每个关节或沿着每个自由度具有最大的加速度，则意味着作了很大简化。实际上，为了避免超出驱动设备的承受能力，必须保守地选取最大加速度值。因而，采用本章介绍的路径规划方法不能充分利用操作臂的速度性能。

自然会提出下列问题：如果已知末端执行器的期望空间路径，如何使操作臂以最短的时间到达目标点（将空间路径的描述转变成轨迹）。这些问题已通过数值计算方法解决了[7, 8]。这些方法考虑了刚体动力学和驱动器的速度-力矩约束曲线。

7.9 无碰撞路径规划

如果能简单地把操作臂运动的期望目标点告诉机器人系统，让系统自行决定所需中间点的位置和数量，以使操作臂到达目标而不碰到任何障碍，这将是非常方便的。为此，必须要有操作臂的模型、工作区域以及在区域内所有潜在的障碍。如果在该区域中还有第二个操作臂在工作的话，在这种情况下，每个机械臂都应该把对方视作运动的障碍。

无碰撞路径规划系统尚未获得商业应用。此领域的研究形成了两个主要的相互竞争的技术以及若干变形和综合技术。一种解决问题的方法是做出一个描述无碰撞空间的连接图，然后在该图中搜索无碰撞路径[9-11, 17, 18]。然而，这些技术的复杂性随着操作臂的关节数量增加而按指数幅度增加。第二种方法是在障碍的周围设置人工势场，使操作臂向目标点处的人工引力场运动时避免碰上障碍[12]。然而，这些方法通常只考虑了局部环境，因而会在人工势场区域的某个局部极小区被“卡”住。

参考文献

[1] R.P. Paul and H. Zong, "Robot Motion Trajectory Specification and Generation," 2nd International Symposium on Robotics Research, Kyoto, Japan, August 1984.

[2] R. Taylor, "Planning and Execution of Straight Line Manipulator Trajectories," in *Robot Motion*, Brady et al., Editors, MIT Press, Cambridge, MA, 1983.

[3] C. DeBoor, *A Practical Guide to Splines*, Springer-Verlag, New York, 1978.

[4] D. Rogers and J.A. Adams, *Mathematical Elements for Computer Graphics*, McGraw-Hill, New York, 1976.

[5] B. Gorla and M. Renaud, *Robots Manipulateurs*, Cepadues-Editions, Toulouse, 1984.

[6] R. Goldman, *Design of an Interactive Manipulator Programming Environment*, UMI
225 Research Press, Ann Arbor, MI, 1985.

[7] J. Bobrow, S. Dubowsky, and J. Gibson, "On the Optimal Control of Robotic Manipulators with Actuator Constraints," *Proceedings of the American Control Conference*, June 1983.

[8] K. Shin and N. McKay, "Minimum-Time Control of Robotic Manipulators with Geometric Path Constraints," *IEEE Transactions on Automatic Control*, June 1985.

[9] T. Lozano-Perez, "Spatial Planning: A Configuration Space Approach," AI Memo 605, MIT Artificial Intelligence Laboratory, Cambridge, MA, 1980.

[10] T. Lozano-Perez, "A Simple Motion Planning Algorithm for General Robot Manipulators," *IEEE Journal of Robotics and Automation*, Vol. RA-3, No. 3, June 1987.

[11] R. Brooks, "Solving the Find-Path Problem by Good Representation of Free Space," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, SMC-13:190–197, 1983.

[12] O. Khatib, "Real-Time Obstacle Avoidance for Manipulators and Mobile Robots," *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 5, No. 1, Spring 1986.

[13] R.P. Paul, "Robot Manipulators: Mathematics, Programming, and Control," MIT Press, Cambridge, MA, 1981.

[14] R. Castain and R.P. Paul, "An Online Dynamic Trajectory Generator," *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 3, 1984.

[15] C.S. Lin and P.R. Chang, "Joint Trajectory of Mechanical Manipulators for Cartesian Path Approximation," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, Vol. SMC-13, 1983.

[16] C.S. Lin, P.R. Chang, and J.Y.S. Luh, "Formulation and Optimization of Cubic Polynomial Joint Trajectories for Industrial Robots," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-28, 1983.

[17] L. Kavraki, P. Svestka, J.C. Latombe, and M. Overmars, "Probabilistic Roadmaps for Path Planning in High-Dimensional Configuration Spaces," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 12(4): 566–580, 1996.

[18] J. Barraquand, L. Kavraki, J.C. Latombe, T.Y. Li, R. Motwani, and P. Raghavan, "A Random Sampling Scheme for Path Planning," *International Journal of Robotics Research*, 16(6): 759–774, 1997.

习题

7.1 [8] 一个六关节机器人沿着一条三次曲线通过两个中间点并停止在目标点，需要计算几个不同的三次曲线？描述这些三次曲线需要存储多少个系数？

7.2 [13] 一个单连杆转动关节机器人静止在关节角$\theta=-5°$处。希望在4s内平滑地将关节转动到$\theta=80°$。求出完成此运动并且使操作臂停在目标点的三次曲线的系数。画出关节的位置、速度和加速度随时间变化的函数。

7.3 [14] 一个单连杆转动关节机器人静止在关节角$\theta=-5°$处。希望在4s内平滑地将关节转动到$\theta=80°$并平滑地停止。求出带有抛物线拟合的直线轨迹的相应参数。画出关节的位置、速度和加速度随时间变化的函数。

7.4 [30] 写出一个能实现式（7-24）~式（7-28）的通用路径规划程序，能处理由任意数量路径点描述的路径。例如，此程序可被用来求解例7.4。 226

7.5 [18] 画出例7.2给出的具有两段连续加速度样条曲线的位置、速度和加速度图形。对于某个关节，$\theta_0=5.0°$, $\theta_v=15.0°$, $\theta_g=40.0°$，每段持续1.0s，画出这些图形。

7.6 [18] 画出两段三次样条曲线的位置、速度和加速度图形，使用式（7-11）给出的系数。对于某个关节，起始点$\theta_0=5.0°$，中间点$\theta_v=15.0°$，目标点$\theta_g=40.0°$，假定每段持续1.0s，并且在中间点的速度为17.5°/s，画出这些图形。

7.7 [20] 对一条带有抛物线拟合的两段直线样条曲线，计算 $\dot\theta_{12},\dot\theta_{23},t_1,t_2$ 和t_3。（使用式（7-24）~式（7-28））。对于这个关节，$\theta_1=5.0°$, $\theta_2=15.0°$, $\theta_3=40.0°$。假定$t_{d12}=t_{d23}=1.0$s，并且在拟合区段中使用的默认加速度为80°/s²。画出θ的位置、速度和加速度图形。

7.8 [18] 画出例7.2给出的具有两段连续加速度的样条曲线的位置、速度和加速度图形。对于某个关节，$\theta_0=5.0°$，$\theta_v=15.0°$，$\theta_g=-10.0°$，假定每段持续2.0s，画出这些图形。

7.9 [18] 画出两段三次样条曲线的位置、速度和加速度图形，使用式（7-11）给出的系数。对于某个关节，起始点$\theta_0=5.0°$，中间点$\theta_v=15.0°$，目标点$\theta_g=-10.0°$，假定每段持续2.0s，并且在中间点的速度为0.0°/s，画出这些图形。

7.10 [20] 对一条带有抛物线拟合的两段直线样条曲线，计算 $\dot\theta_{12},\dot\theta_{23},t_1,t_2$ 和t_3。（使用式（7-24）~（7-28）式）。对于这个关节，$\theta_1=5.0°$, $\theta_2=15.0°$, $\theta_3=-10.0°$。假定$t_{d12}=t_{d23}=2.0$s，并且在拟合区段处使用的默认加速度为60°/s²。画出θ的位置、速度和加速度图形。

7.11 [6] 求出与 ${}^S_GT$ 等效的6×1笛卡儿位姿表达式 ${}^S\chi_G$，其中 ${}^S_GR=ROT(\hat{Z},30^\circ)$ 并且 ${}^SP_{GORG}=[10.0\ \ 20.0\ \ 30.0]^T$。

7.12 [6] 求出与6×1笛卡儿位姿表达式 ${}^S\chi_G=[5.0\ \ -20.0\ \ 10.0\ \ 45.0\ \ 0.0\ \ 0.0]^T$ 等效的 ${}^S_GT$。

7.13 [30] 写出一个程序，使用6.7节（平面两杆操作臂）的动力学公式，计算使操作臂沿着习题7.8的轨迹运动所需要施加的力矩随时间的变化规律。求出力矩的最大值以及发生在轨迹的何处？

7.14 [32] 写出一个程序，用6.7节（平面两杆操作臂）的动力学公式，计算使操作臂沿着习题7.8的轨迹运动所需要施加的力矩随时间的变化规律。根据惯性项、速度项和重力分别画出所需的关节力矩图。

7.15 [22] 如$t_{f1}\neq t_{f2}$，计算例7.2。

7.16 [25] 希望在时间t_f内把一个单关节操作臂由初始的静止状态θ_0转到终止的θ_f，并静止。θ_0和θ_f的值已知，但是希望求出t_f，以使对所有的t，$\|\dot\theta(t)\|<\dot\theta_{max}$ 并且 $\|\ddot\theta(t)\|<\ddot\theta_{max}$，其中 $\dot\theta_{max},\ddot\theta_{max}$ 为给定的正常数。使用一条三次样条曲线段，求出t_f的表达式和三次样条曲线的系数。

7.17 [10] 在从t=0到t=1的时间区间，使用一条三次样条曲线轨迹：$\theta(t)=10+90t^2-60t^3$。求其起
227 始点和终止点的位置、速度和加速度。

7.18 [12] 在从t=0到t=2的时间区间，使用一条三次样条曲线轨迹：$\theta(t)=10+90t^2-60t^3$。求其起始点和终止点的位置，速度和加速度。

7.19 [13]在从t=0到t=1的时间区间，使用一条三次样条曲线轨迹：$\theta(t)=10+5t+70t^2-45t^3$。求其起始点和终止点的位置、速度和加速度。

7.20 [15] 在从t=0到t=2的时间区间，使用一条三次样条曲线轨迹：$\theta(t)=10+5t+70t^2-45t^3$。求其起始点和终止点的位置、速度和加速度。

编程习题

1. 编写出一个关节空间三次样条曲线的路径规划系统。系统应包括一个子程序

```
Procedure CUBCOEF (VAR th0, thf, thdot0, thdotf: real; VAR cc:
vec4);
```

其中

th0=θ在起始段的初始位置，

thf=θ在最终段的终止位置，

thdot0 = 曲线段的初始速度，

thdotf = 曲线段的终止速度。

这四个变量是输入，而“cc”——4个三次曲线系数的数组是输出。

程序最多（或至少）应该能够输入5个中间点——在相对于工作台坐标系{S}的工具坐标系{T}中表达，或者以通常的用户形式(x, y, ϕ)表达。为了简便，所有的曲线段具有相同的时间间隔。该系统应能解出三次样条曲线的系数，利用适当的启发式算法确定在中间点处的关节速度。提示：参见7.3节方法2。

2. 编写一个路径生成器系统，在关节空间根据各段三次样条曲线的系数数组计算轨迹。系统必须能够生成在第1题中规划的多曲线段路径。各曲线段的时间间隔由用户指定。系统应能以路径更新率产生位置、速度和加速度信息，该速率仍可由用户指定。

3. 一个操作臂与前面使用的三连杆操作臂相同。坐标系{T}和{S}的定义与前述相同：

$${}^W_TT=[x\ y\ \theta]=[0.1\ \ 0.2\ \ 30.0]$$

228

$${}^B_ST=[x\ y\ \theta]=[0.0\ \ 0.0\ \ 0.0]$$

每段的时间间隔为3.0s，操作臂的起始点为

$$[x_1\ y_1\ \phi_1]=[0.758\ \ 0.173\ \ 0.0]$$

运动经过中间点

$$[x_2\ y_2\ \phi_2]=[0.6\ \ -0.3\ \ 45.0]$$

和

$$[x_3\ y_3\ \phi_3]=[-0.4\ \ 0.3\ \ 120.0]$$

并终止在目标点（在本例中，与起始点相同）

$$[x_4\ y_4\ \phi_4]=[0.758\ \ 0.173\ \ 0.0]$$

规划并执行路径。路径更新率为40Hz，但仅每隔0.2s打印位置信息。用笛卡儿用户坐标形式打印位置信息。不必打印出速度和加速度，尽管你可能有兴趣这样做。

MATLAB习题

本练习的目的是建立单关节多项式关节空间轨迹生成方程（如果是多关节，则需要n次运用本结果）。针对下面三种情况，编写一个MATLAB程序建立关节空间轨迹生成器。对给定的任务输出结果。对于每种情况，给出关于关节角、角速度、角加速度以及角加速度变化率（即：加速度对时间的导数）的多项式函数。对于每种情况，打印出结果（纵坐标为角度、角速度、角加速度和角加速度变化率，所有时间单位相同——通过核对MATLAB的作图子函数*subplot*完成这项工作）。不要只是作出图来——还需要做一些讨论，以此检验你的结果是否有意义？以下是三种情况：

a) *三阶多项式*。在初始点和终止点，令角速度为0。已知$\theta_s=120°$（起始点），$\theta_f=60°$（终止点），$t_f=1s$。

b) *五阶多项式*。在初始点和终止点，令角速度和角加速度为0。已知$\theta_s=120°$（起始点），$\theta_f=60°$（终止点），$t_f=1s$。将计算结果（函数与图形）与题(a)中使用三阶多项式的结果进行比较。

c) *两段带有中间点的三阶多项式*。在起始点和终止点，令角速度和角加速度为0。不必令在中间处的角速度为0——必须保证两段多项式在那点上的时间重合，使二者的速度和加速度相同。证明可以满足此条件。已知$\theta_s=60°$（起始点），$\theta_v=120°$（中间点），$\theta_f=30°$（终止点），并且$t_1=t_2=1s$（即相对时间步长$t_f=2s$）。

d) 用Corke MATLAB Robotics工具箱检验(a)和(b)的结果。试用函数*jtraj*()。 229

第8章　操作臂的机械设计

8.1　概述

根据前面章节的内容，可知操作臂的结构会对其运动学和动力学的分析产生影响。例如，有的运动学结构非常便于求解，有的则没有封闭解。同样，动力学方程的复杂程度会随着操作臂运动学结构和连杆的质量分布而发生很大变化。在后面的几章里，将会看到操作臂的控制不仅与刚体动力学有关，而且还与驱动系统的摩擦和柔性有关。

操作臂所能完成的任务随特定结构设计的不同而有很大的区别。尽管通常把操作臂抽象成一个实体，但是它所能完成的任务主要受到以下实际因素的限制，例如，负载能力、速度、工作空间的大小、可重复定位精度等。对于一些特定的应用场合，操作臂的整体尺寸、重量、功率消耗和设计制造成本将是非常重要的影响因素。

本章将讨论几个与操作臂设计有关的问题。一般来讲，设计方法以及对一个设计的评价都是设计的局部问题。很难用一些固定的设计规则来对设计方法的选择进行限制。

机器人系统的组成大体上可分为四部分:

1. 操作臂，包括它的内部或**本体**传感器;
2. 末端执行器，或者叫做**工具端**;
3. 外部传感器和执行器，比如视觉系统和反馈装置;
4. 控制器。

230

由于工程设计中涉及的工程规则非常广泛，所以需把主要精力放在操作臂本身的设计上。

在操作臂设计的过程中，首先需要考虑那些可能对设计影响最大的因素，然后再考虑其他细节问题。当然，操作臂设计是一个反复的过程。有时，在进行细节设计的过程中会出现一些问题，这时必须对前面上层设计中的方案进行重新考虑。

8.2　基于任务需求的设计

尽管从定义上讲机器人是“完全可编程”的并且能够执行多种工作任务的机械系统。但是从经济性与实用性的角度考虑时，操作臂则应该根据工作任务的特定类型进行设计。例如，有的大型机器人能够承受数百磅的负载，但通常却不能把电子元件插入到电路板上。下面还会看到，不仅是操作臂的尺寸，还有关节的数目、关节的布局、驱动器的类型、传感器和控制器的选择都会因工作任务的不同而有很大的变化。

自由度的数目

操作臂的自由度数目应该与所要完成的任务相匹配。并不是在完成任何任务时，机器人都需要6个自由度。

在大多数情况下，末端执行器均具有一个对称轴。图8-1所示的是操作臂以两种不同的方法对磨削工具进行定位。在这种情况下，工具相对于工具轴 $\hat{Z}_T$ 的方位是无关紧要的，因为磨削轮

以每分钟几百转的速度在旋转。虽然这个6自由度机器人完成这项工作可以有无穷多个位置和姿态（绕 $\hat{Z}_T$ 的转动是一个自由变量），但是这个机器人对于完成该项任务而言其实是冗余的。用于弧焊、点焊、去毛刺、粘结和抛光等工作任务的机器人，其末端执行器都至少具有一个对称轴。

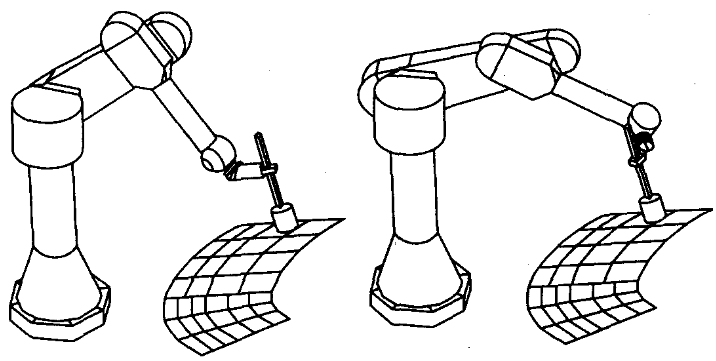


图8-1 其工具端具有一个对称轴6的自由度操作臂，存在一个冗余自由度 231

在对这种工具端具有对称轴的操作臂进行分析时，有时可以假想存在一个虚拟关节，该虚拟关节轴与这个对称轴重合。当把末端执行器定位于任何一个特定姿态时，总的自由度数目需要6个。由于这6个关节中有一个关节是虚拟关节，所以实际的操作臂不必超过5个自由度。如果在图8-1所示的情况应用一个5自由度机器人时，这个问题就变成了一般情况，在这种情况下对工具进行定位只有有限的几种解。由于工具端具有对称轴的操作臂具有非常多的优点，因此相当多的工业机器人都是5自由度机器人。

很多任务都可以在少于6个自由度的情况下完成，在电路板上安装电器元件就是一个常见的例子。电路板通常都是平面的，其上具有高度不同的元件。把一个元件放置于电路板平面上需要3个自由度(x, y和θ)；为了拔出和插入元件，需要有垂直于电路板平面的第四个运动(z)。

在一些任务中，当由主动定位装置来放置零件时，则可以使用少于6个自由度的机器人。例如，在圆管焊接作业中，由一个倾斜/转动工作台来放置被焊接的零件，如图8-2所示。在计算圆管和末端执行器之间的自由度时，倾斜/转动工作台应该被视为有2个自由度。这样，在进行弧焊时，由于其工具端具有对称轴，所以从理论上讲，3自由度操作臂就可以完成该任务。在实际应用中，为了避免操作臂与工件发生碰撞，往往要求使用自由度更多的机器人。

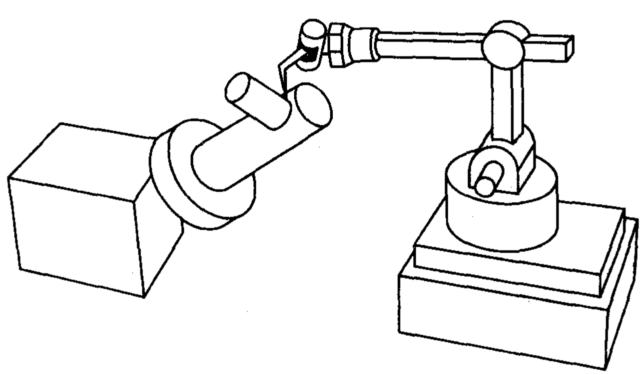


图8-2 一个倾斜/转动工作台为操作臂提供了2个自由度

如果零件自身具有对称轴，那么也会减少操作臂所需要的自由度数目。例如，在很多情况下，当取出和插入圆柱体零件时，则不需要考虑夹持器相对于圆柱体轴线的方位。然而需要注意的是，因为零件的方位不确定，所以当零件被夹持后，零件对称轴的方位与所有后面
232 的操作无关。

工作空间

在执行工作任务时，操作臂必须能够达到若干工件和夹具的位置。在某些情况下，为了适应操作臂的工作空间，应按照需要给工件和夹具定位。在另外一些情况下，机器人安装在一个有刚性工作空间要求的固定环境中。**工作空间**有时也被称作**工作空间体积**或**工作空间包络**。

任务的规模决定了操作臂需要的工作空间。在某些情况下，工作空间的形状以及工作空间的奇异性等细节问题是非常重要的，因此必须予以考虑。

操作臂自身在工作空间中发生干涉也是一个问题。根据运动学设计，在特定应用环境中，需要在夹具周围留有适当的空间以免操作臂运动时发生碰撞。但是限制严格的工作环境可能会对操作臂的运动学构形的选择产生影响。

负载能力

操作臂的**负载能力**与其结构尺寸、动力传递系统和驱动器有关。施加到驱动器和驱动系统的负载是随机器人的结构、支承负载的时间长短以及由于惯性力和与速度有关的力产生的动力载荷变化的。

速度

在设计操作臂时，一个明显的目标是使操作臂具有越来越高的速度。在许多应用场合，所提出的机器人方案必须在高度自动化或人工劳动力等方面具有经济竞争力，高速度提供了明显的竞争优势。然而，对于某些应用场合，速度的大小是由操作性质决定的，而不是操作臂本身限制了速度。一些用于焊接和喷涂的机器人正是这种情况。

对于特定的任务，操作臂末端执行器的最大速度和总体**循环时间**是有很大区别的。例如，机器人在抓持和放置物体时，操作臂必须加速并减速到达或离开抓持和放置位置，同时需要满足一定的定位精度要求。通常，加速和减速时间占据了大部分的循环时间。因此，除了最大速度之外，加速能力也非常重要。

重复精度和定位精度

尽管在操作臂设计中希望达到很高的重复精度和定位精度，但这需要很高的成本。例如，在喷涂点的直径为8 ± 2in的情况下，要求设计一台喷涂机器人达到0.001in的喷涂精度是不现实的。在很大程度上讲，某种形式的工业机器人的精度与其制造的具体过程有关，而不在于操作臂的设计。全面掌握连杆（以及其他）参数可使操作臂达到很高精度。为了达到这个目
233 的，可以在操作臂制造完成后进行精确的测量，或者在制作过程中保证加工公差。

8.3 运动学构形

一旦所需要的自由度数确定之后，必须合理布置各个关节来实现这些自由度。对于串联

的运动连杆，关节数目等于要求的自由度数目。大多数操作臂的设计是由最后$n-3$个关节确定末端执行器的姿态，且它们的轴相交于**腕关节原点**，而前面3个关节确定腕关节原点的位置。采用这种方法设计的操作臂，可以认为是由**定位结构**及其后部串联的**定向结构**或手腕组成的。根据第4章的知识，可以知道这类操作臂都有封闭的运动学解。尽管也存在其他一些具有封闭运动学解的构形，但是几乎所有的工业操作臂都采用这种**腕部机构布局**形式。另外，定位结构无一例外的采用这样一种简单的运动学结构：连杆转角为0°或者±90°，连杆长度不同，但连杆偏距都为0。

通常根据前三个关节（定位结构）的设计形式对操作臂的腕部进行简单的运动学分类。下面对几种最常见的分类进行简要介绍。

笛卡儿操作臂

笛卡儿操作臂也许具有最简单的构形。如图8-3所示，关节1到关节3都是移动副，且相互垂直，分别对应于笛卡儿坐标的$\hat{X}$、$\hat{Y}$、$\hat{Z}$轴，这类构形的逆运动学解是很简单的。

该类机器人具有很高的结构刚度。因此采用这种构形可以制造大型机器人。这些大型机器人通常被称为**龙门式机器人**，类似于悬空的龙门式起重机。龙门式机器人有时可用于整台汽车的作业或者检查整架飞机。

笛卡儿操作臂的另一个优点是其前面的三个关节是**解耦的**，从而使设计简单化，并且避免了前三个关节出现运动学奇异点。

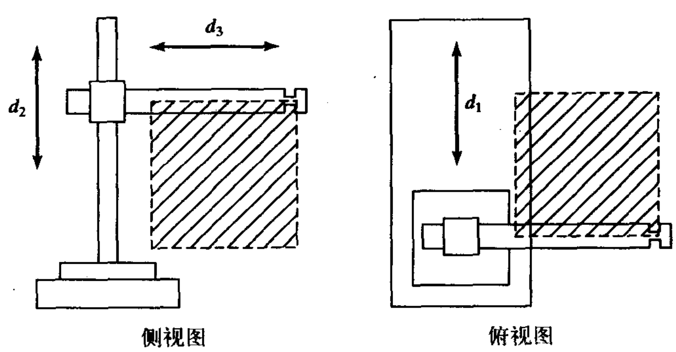


图8-3 笛卡儿操作臂 234

这类操作臂的主要缺点是，在应用中所有电缆和固定装置均须“内置”于机器人中。因此，笛卡儿机器人所能完成的工作完全取决于本身的机械结构。机器人支承结构的尺寸限制了夹具和传感器的尺寸和位置。这些限制使得将不同形式的机器人应用到一个给定的工作空间时变得十分困难。

铰接型操作臂

图8-4所示的是**铰接型操作臂**，有时候被称为**关节型**，**肘型**或者**拟人操作臂**。这种类型的操作臂通常由两个“肩”关节（一个绕竖直轴旋转，一个改变相对于水平面的仰角）、一个“肘”关节（该关节的轴通常平行于俯仰关节）以及2个或者3个位于操作臂末端的腕关节组成。前面章节研究过的PUMA560和Motoman L-3都属于此类型。

铰接型机器人减少了操作臂在工作空间中的干涉，使操作臂能够到达指定的空间位置。它们的整体结构比笛卡儿操作臂小，可应用于工作空间较小的场合，成本较低。

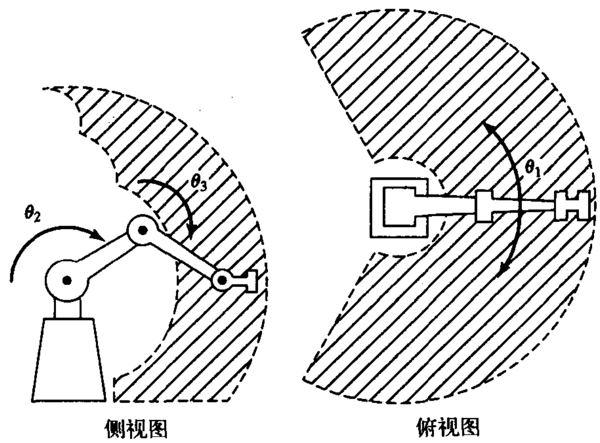


图8-4 铰接型操作臂

SCARA操作臂

如图8-5所示，SCARA⊖构形有三个平行的旋转关节（使机器人能在一个平面内移动和定向），第四个移动关节可以使末端执行器垂直于该平面。这种结构的主要优点是前三个关节不必支承操作臂或负载的任何重量。另外，便于在连杆0中固定前两个关节的驱动器。因此，驱
235 动器可以做得很大，从而可使机器人快速运动。例如，Adept One SCARA操作臂移动速度能达到30ft/s，比许多铰接型工业机器人的速度快10倍[1]。这类构形最适合于执行平面内的任务。

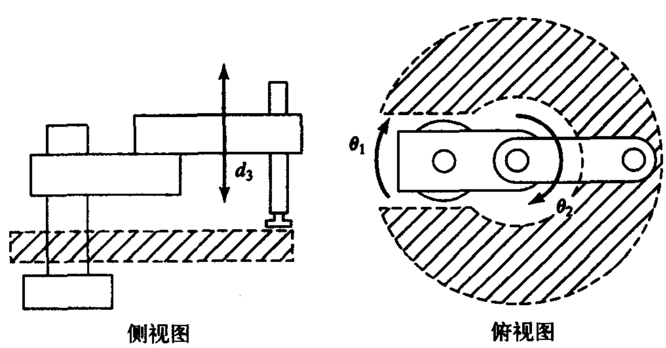


图8-5 SCARA操作臂

球面坐标型操作臂

球面构形如图8-6所示，与铰接型操作臂有很多相似之处，但是用移动关节代替了肘关节。这种设计在某些场合比铰接型操作臂更加适用。移动连杆可以伸缩，缩回时，甚至可以“从后面伸出”。

⊖ SCARA代表“可选择的柔性装配机械臂”。

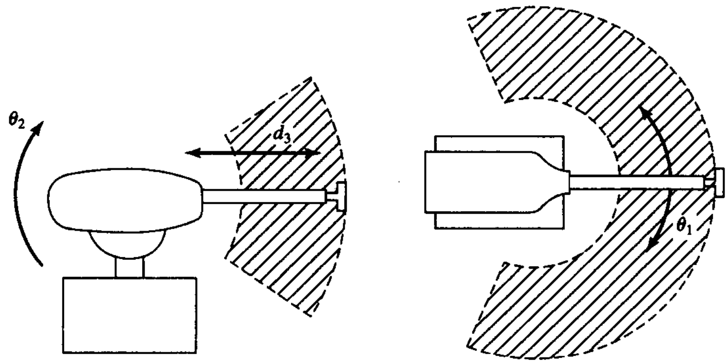


图8-6 球面坐标型操作臂

圆柱面坐标型操作臂

圆柱面坐标型操作臂（如图8-7所示）由一个使手臂竖直运动的移动关节和一个带有竖直轴的旋转关节组成，另一个移动关节与旋转关节的轴正交，还有一个某种形式的腕关节。

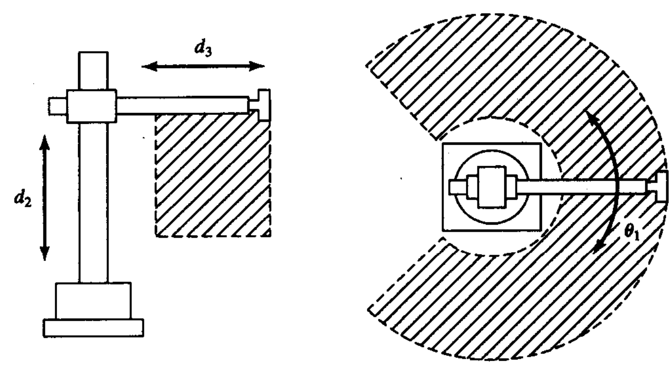


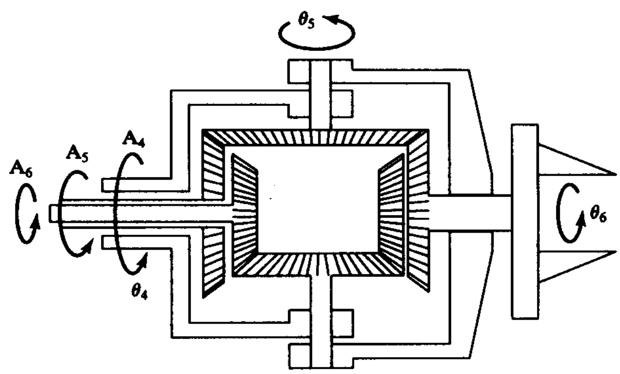
图8-7 圆柱面坐标型操作臂

腕关节

最常见的腕关节构形由两个或三个正交的旋转关节组成，第一个腕关节通常是操作臂的第四个关节。

三个正交轴的构形可以确保操作臂到达任意方位（假设没有关节角度限制）[2]。由第4章的知识可知，具有三个连续相交轴的操作臂具有一个封闭的运动学解。因此三个正交轴的腕关节可以随意地以任何期望的方位布置在操作臂的末端。图8-8是这类腕关节的设计原理图，远端的驱动器通过几组锥齿轮来驱动这个机构。

在实际中，很难制作出这种三轴正交且不受关节角度限制的腕关节。由辛辛纳提Milacron（图1-4）制造的许多机器人采用了一种设计方法，它们的腕关节都采用了由三个相交但不垂直的轴构成。在这种设计中（称为“三转动腕关节”），腕部的三个关节可以无限制地连续旋



236
~
237 图8-8 远端的驱动器通过三个中心轴驱动具有正交轴的腕关节

转。然而由于这几个轴不正交，从而使腕部不能到达一些方位。这些不能到达的方位可以描述为腕部的第三个轴不能进入的锥体（见习题8.11）。然而，这个腕关节能被安装在操作臂的连杆3上，在这种情况下，连杆结构部分占据了这个圆锥，因此可能会阻碍操作臂的运动。图8-9所示为这类腕关节的两个视图[24]。

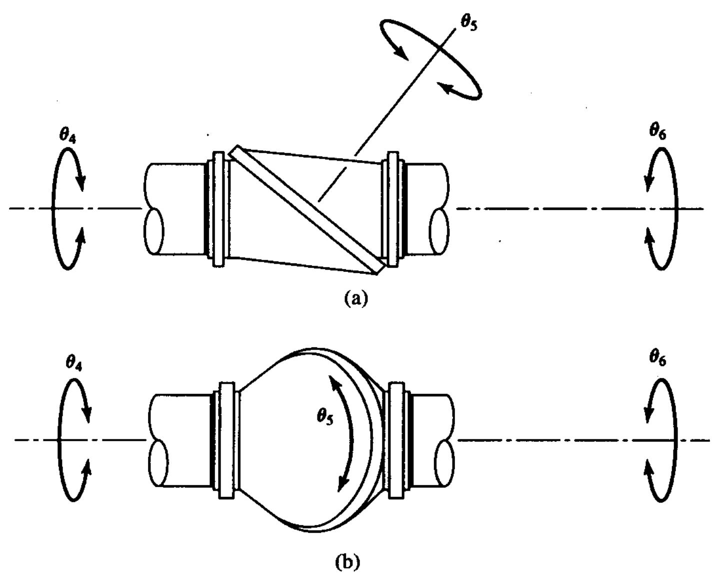


图8-9 非正交轴腕关节的两个视图[24]摘自R.Dorf和S.Nof（编者）编写的《国际机器人百科全书》。摘自M.Rosheim编写的《腕关节》，John C.Wiley和Sons公司，纽约，©1988。准许翻印。

有一些工业机器人的腕关节没有相交轴，这说明不存在封闭形式的运动学解。但是如果将腕关节安装在铰接型操作臂上，那么它的第4个关节轴与第2、3个关节轴平行，这时可以得到一个封闭形式的运动学解，如图8-10所示。同样，把无相交轴的腕关节安装在笛卡儿机器人上也能得到一个封闭解的操作臂。

典型的5自由度焊接机器人使用两轴腕关节确定方向，如图8-11所示。注意：如果机器人有一个对称工具，那么这个“虚拟关节”必须符合腕关节设计规则，也就是说，为了使腕关节能够到达任何方位，在安装工具时必须使其对称轴与关节5的轴正交。在最不利的情况下，

238 当对称轴平行于关节5的轴线时，第六个虚拟轴永远处于奇异位形。

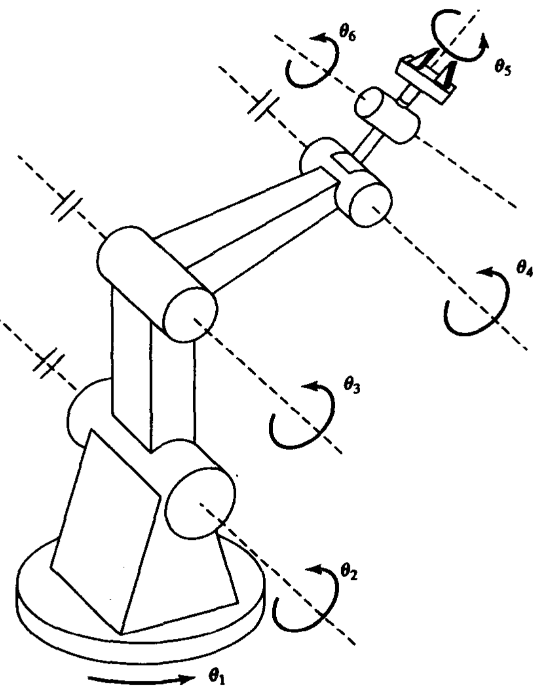


图8-10 腕关节轴不相交的操作臂，但是这类机器人有封闭形式的运动学解

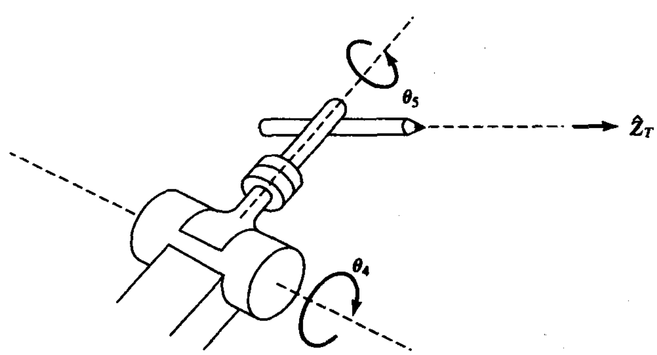


图8-11 5自由度焊接机器人的典型腕关节设计

8.4 工作空间属性的定量测量

操作臂设计者已经提出了几种有效的关于各种工作空间属性的定量测量方法。 239

按照生成工作空间设计的效果

设计人员发现，当使机器人具有相似的工作空间体积时，制作笛卡儿操作臂比制作铰接型操作臂要消耗更多的材料。为了在这方面进行定量分析，首先定义操作臂的**长度和**为

$$L=\sum_{i=1}^{N}(a_{i-1}+d_i) \tag{8-1}$$

式中a_{i-1}和d_i是第3章中定义的连杆长度和关节偏距，因此可根据操作臂的长度和粗略计算出整个运动链的"长度"。注意：对于移动关节来说，d_i必须是在关节移动范围内与移动行程相等的常量。

在文献[3]中，定义**结构长度指标**Q_L为操作臂长度和与工作空间体积立方根的比值

$$Q_L = L/\sqrt[3]{w} \tag{8-2}$$

式中L在式（8-1）中定义，W为操作臂工作空间的体积，因此指数Q_L表示由不同构形生成一个给定工作空间体积时结构的（连杆长度）相对值。所以，一个好的操作臂设计应该使长度和较小的连杆具有较大的工作空间体积。好的设计方案应使Q_L值较小。

仅考虑笛卡儿操作臂的定位结构（因此也就得到了腕关节原点的工作空间），当三个关节行程相同时，Q_L的最小值为3.0。另一方面，对于理想的铰接型操作臂，如图8-4所示，有$Q_L = \frac{1}{\sqrt[3]{4\pi/3}} \cong 0.62$。这定量地说明了前面的结论：铰接型操作臂与其他构形的操作臂相比，在工作空间内干涉最小，具有最优的结构。当然，在任何实际的操作臂结构中，由于关节运动范围的影响，从而减小了实际的工作空间体积，导致Q_L值增大了一些。

例8.1

如图8-5所示的SCARA操作臂，连杆1和连杆2的长度均为$l/2$，移动关节3的行程为d_3，为简单起见，不计关节转角的限制，求Q_L。当d_3为何值时，Q_L最小，并求出最小的Q_L。

该操作臂的臂杆长度和$L = l/2 + l/2 + d_3 = l + d_3$，工作空间体积为一半径为$l$、高为$d_3$的正圆柱体，因此

$$Q_L = \frac{l + d_3}{\sqrt[3]{\pi l^2 d_3}} \tag{8-3}$$

240 Q_L的最小值是d_3/l的函数，$d_3 = l/2$为最佳值[3] Q_L的最小值为1.29。

设计良好条件的工作空间

在奇异点处，操作臂会失去一个或者多个自由度，所以在该位置处某些任务将无法完成。实际上，在奇异点的附近（包括工作空间边界的奇异点），操作臂将不能在**良好条件**下工作。因此，从某种意义上讲，操作臂离奇异点越远，操作臂越能均匀地在各个方向上移动和施力。目前，已有多种方法可以定量分析这种效果。如果在设计过程中采用这些方法，将可以使操作臂的设计工作空间具有最大良好条件的子空间。

奇异位形由下式给出

$$\det(J(\Theta)) = 0 \tag{8-4}$$

所以可以很自然地使用雅克比矩阵的行列式来判断操作臂的灵巧性。在文献[4]中，可操作度w被定义为

$$w = \sqrt{\det(J(\Theta)J^T(\Theta))} \tag{8-5}$$

对于非冗余的操作臂，简化为

$$w = |\det(J(\Theta))| \tag{8-6}$$

一个操作臂的w值越大，其灵巧工作空间也越大，该操作臂的设计则越好。

尽管由速度分析可得到式（8-6），但有其他研究者提出根据加速度分析或者力的施加能力得出可操作度指标。Asada[5]建议把笛卡儿质量矩阵

$$M_x(\Theta)=J^{-T}(\Theta)M(\Theta)J^{-1}(\Theta) \quad (8\text{-}7)$$

的特征根作为评判操作臂在各个笛卡儿方向的加速能力的方法。他提出了用一个n维的**惯性椭球**的图示测量方法，n维椭球方程为

$$X^TM_x(\Theta)X=1 \quad (8\text{-}8)$$

式中，n为X的维数。由式（8-8）给出的椭球，其轴线位于$M_x(\Theta)$特征矢量的方向上，与特征矢量对应的特征值的平方根的倒数是椭球轴的长度。操作臂工作空间中具有良好条件的点形成的惯性椭球为一球体（或者近似为球体）。

图8-12以图形的方式展示了平面两杆操作臂的特性。在工作空间的中间，椭球近似于球形，操作臂处于良好条件。在工作空间的边界上椭球变扁，这说明操作臂在某些方向上加速困难。

其他一些工作空间条件的测量可参见文献[6-8，25]。

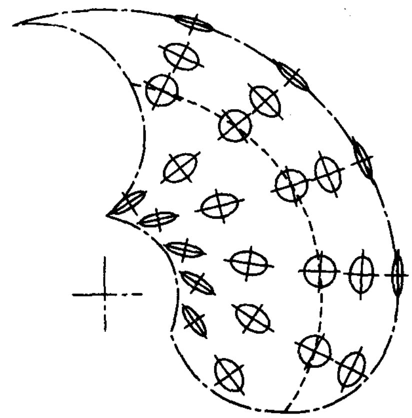


图8-12 两自由度平面操作臂的工作空间，显示了惯性椭球（摘自文献[5]）。虚线表示工作空间中各向同性的点的位置。准许翻印

8.5 冗余机构与闭链机构

总之，本书的研究范围限定在具有6关节或者少于6关节的串联操作臂。但在这一节中，将简单讨论其他类型的操作臂。 241

微操作臂和其他冗余机构

通常空间定位只需要6个自由度，但是拥有更多数量的可控关节会带来一定好处。

这些具有多余自由度的操作臂已在实际中得到应用[9, 10]，而且在**微操作臂**的研究领域中越来越受到人们的关注。微操作臂一般由几个安装在“传统”操作臂末端附近的快速而精确的自由度构成。传统的操作臂负责大范围的运动，而微操作臂由于关节通常具有较小的运动范围，所以主要用于完成精细的运动与力的控制。

文献[11，12]中提出利用附加的关节帮助机构避开奇异位形。例如，任何一个3自由度腕关节都会有奇异位形的问题（当三个轴线处于同一个平面时），但是4自由度腕关节就能够有效避免这种位形[13-15]。

图8-13所示为文献[11，12]推荐的两种7自由度的操作臂位形。

冗余自由度机器人的一个主要用途是在杂乱的工作环境中工作时避免发生碰撞。正如我们看到的那样，6自由度操作臂只能以有限的几种方式到达指定的位姿，但是添加了第7个自由度后，将会有无穷种方式到达期望位姿，以免因障碍物影响路径的选择。

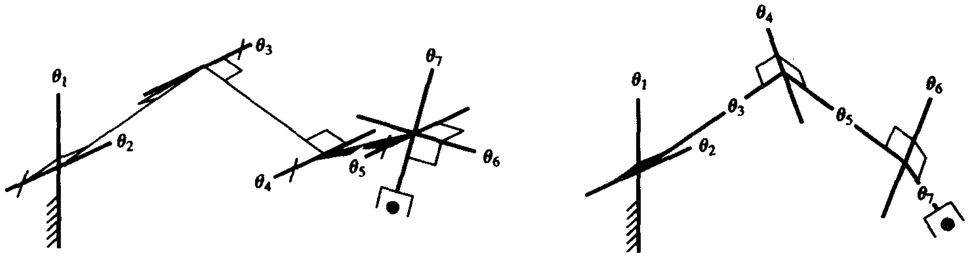


图8-13 两种推荐的7自由度操作臂的设计方案[3]

闭环结构

尽管在分析中只考虑了串联的操作臂，但是很多操作臂往往具有**闭环结构**。例如：在第3章和第4章讲到的Motoman L-3机器人在关节2和关节3的驱动机构处具有闭环结构。闭环结构有一个好处：提高了机构的刚度[16]。但是另一方面，闭环结构通常会减小关节的运动范围，从而减小了工作空间。

图8-14所示为一个**Stewart机构**，一种可代替6自由度串联操作臂的闭环机构。通过控制六个跟基座相连的直线驱动器的行程实现其“末端执行器”的位姿。每个驱动器的一端用一个2自由度的万向关节与基座连接，另一端用一个3自由度的球关节与末端执行器相连。该机构体现了绝大多数闭环机构的共同特点：刚度好，但其连杆的运动范围比串联连杆的运动范围受到更大的限制。尤其是Stewart机构的正向与逆向运动学求解特点正好相反：逆向求解很简单，然而正向求解一般很复杂，有时候甚至得不到一个封闭形式的方程（见习题8.7和8.12）。

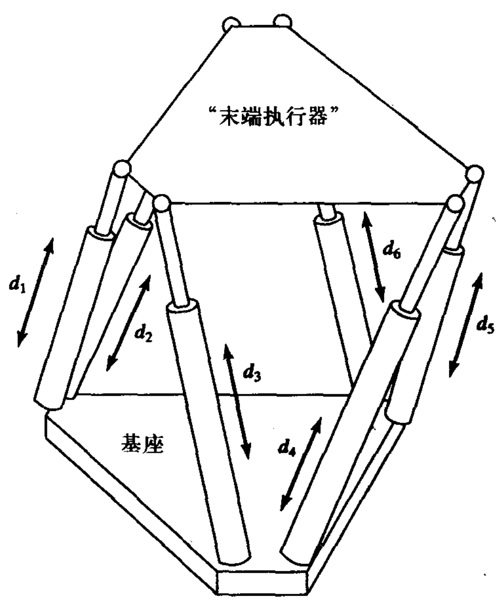


图8-14 Stewart机构是一个6自由度的完整并联操作臂

通常，闭环机构的自由度并不明显。可以使用Grübler公式[17]来计算该类机构总的自由度数目。

$$F = 6(l-n-1)+\sum_{i=1}^{n} f_i \tag{8-9}$$

式中，F是机构的总自由度数，l是连杆数目（包括基座），n是总关节数，f_i是与第i个关节相连的自由度数。如果把式（8-9）中的6换成3就得到了平面机构的Grübler公式（即：如果不存在约束，则认为每个物体都具有3个自由度）。

例8.2

用Grübler公式验证图8-14所示的Stewart机构确实具有6个自由度。

总关节数n为18（在驱动器上有6个万向关节，6个球关节，6个移动关节），连杆数l为14（每个驱动器有两个杆，再加上末端执行器和基座），总的关节自由度数是36。利用Grübler公式，可以确定机构的自由度数是6:

$$F = 6(14-18-1)+36 = 6 \tag{8-10}$$

■

8.6 驱动方式

当操作臂的总体运动学结构确定后，下一步要考虑的最重要问题是各个关节的驱动方式。通常，驱动器、减速装置和传动装置是密切相关的，所以必须综合考虑。

驱动器布局

最直接的办法是把驱动器布置在所驱动的关节上或者附近。如果驱动器能够产生足够的力矩或者力的话，那么驱动器的输出轴可直接与关节相连。这种结构布局[18]称为**直接驱动**。它具有设计简单、控制方便等优点——即：在驱动器和关节之间没有传动元件或减速元件，因而关节运动的精度与驱动器的精度相同。 242~244

然而，大多数驱动器为高转速、低扭矩，所以需要安装**减速系统**。而且，驱动器通常都很重。如果驱动器能远离关节而靠近操作臂的基座安装，则操作臂的总体惯性将会明显下降，反过来也减小了驱动器的尺寸。为此，需要使用**传动系统**把驱动器的运动传送给关节。

在驱动器远离关节的驱动系统中，减速系统可以放置在驱动器或者关节上。有些布局方案把减速系统与传动系统的功能集成在一起。另外，除了增加机构的复杂性外，减速系统与传动系统的主要弊端之一是产生了不必要的摩擦和变形。如果减速系统安装在关节上，那么传动系统工作在较高转速、较低扭矩状态下。低扭矩意味着变形将不是一个主要问题。但是，如果减速器的重量很大，则驱动器远离关节安装的意义就不大了。

在第3章中，曾经详细介绍了Yasukawa Motoman L-3的驱动器方案。在这个典型设计中，远离关节安装的驱动器与关节的运动是耦合的。方程（3.16）清楚地给出了驱动器如何驱动关节产生运动的。例如，驱动器2驱动关节2、3、4运动。

在传动系统中对减速级的优化分配主要取决于传动系统的柔性、减速系统的重量、减速系统的摩擦以及在设计中把这些传动元件集成到操作臂上的难易程度。

减速系统和传动系统

齿轮是最常用的减速元件，它的结构紧凑，传动比大。齿轮副有平行轴（直齿轮）、正交

轴（锥齿轮）、倾斜轴（蜗轮或螺旋齿轮）等几种形式。不同类型的齿轮组有不同的负载能力、磨损特性和摩擦特性。

齿轮传动的主要缺点是额外引入了**间隙与摩擦**。间隙是由于齿轮啮合的不理想而产生的，它被定义为，当输入齿轮固定不动时，输出齿轮所产生的最大角位移。如果使轮齿啮合紧密以消除间隙，则又会带来过大的摩擦。采用高精度的齿轮以及高精度的安装方式可以减小这些影响，但会使成本上升。

齿轮传动比η，反映齿轮副的减速效应与扭矩的增加效应。对于减速系统，定义$\eta>1$；则输入速度、输出速度、扭矩之间的关系是

245

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_o &= (1/\eta)\dot{\theta}_i \\ \tau_o &= \eta\tau_i\end{aligned} \tag{8-11}$$

式中，$\dot{\theta}_o$、$\dot{\theta}_i$分别为输出速度和输入速度，τ_0、τ_i分别为输出扭矩和输入扭矩。

第二大类减速元件是柔性带、钢缆和皮带。由于要有足够的柔性才能卷绕在传动轮上，所以这些元件在长度方向通常具有柔性。它们的柔性大小与其长度成正比。由于这些传动系统具有柔性，所以必须使用预紧装置保证皮带或者钢缆紧绕在传动轮上。但是过大的预紧力会对柔性零件增加不必要的张紧力，会产生过大的摩擦。

钢缆或者柔性带可以通过闭环形式或单端形式预紧的装置保持一定的张力。在弹簧单向加载的关节中，单端预紧的钢缆可以产生平衡弹簧力的拉力。另外，具有两个主动单端预紧装置的系统可以互相向相反方向施加预紧力，这种布局可以消除预紧力过大的问题，但需要增加更多的驱动器。

传动链与柔性带相似，但能够卷绕在更小的传动轮上并具有较高的刚度。由于连接连杆的定位销会产生磨损及受到过大的载荷，所以在某些应用场合中齿形带比传动链更加紧凑。

柔性带、钢缆、皮带和链传动都能够在传动系统中提供减速的功能。如图8-15所示，输入轮与输出轮的半径分别为r_1和r_2，则传动系统的“传动”比为

$$\eta = \frac{r_2}{r_1} \tag{8-12}$$

普通丝杠或者滚珠丝杠也是常见的可以提供大减速比的紧凑传动方案（见图8-16)。普通丝杠的刚度高，能承受较大载荷，可以把旋转运动转换成直线运动。滚珠丝杠与普通丝杠相似，但并不是让螺母在螺杆的螺纹上滑动，而是让滚珠在滚珠槽中循环滚动。滚珠丝杠具有很小的摩擦力，通常还可以逆向传动。

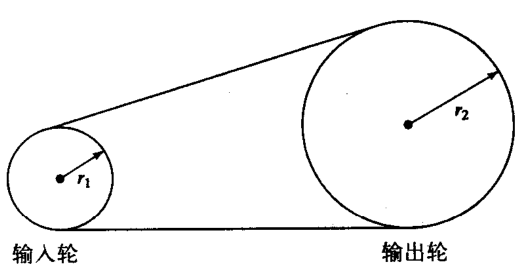


图8-15 柔性带、钢缆、皮带和链传动都可以在传动系统中提供减速功能

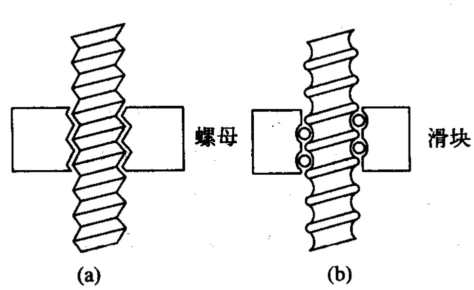


图8-16 普通丝杠(a)和滚珠丝杠(b)都具有较大的传动比，可以把旋转运动转换成直线运动

8.7 刚度与变形

操作臂的结构与驱动系统的总体刚度是绝大多数操作臂设计时需要重点考虑的问题。刚性系统具有两个主要优点。首先，因为典型的操作臂都不具备能够直接测量工具坐标系位置的传感器，因此只能根据关节传感器的位置，通过正向运动学计算得到工具坐标系的位置。要想得到精确的计算结果，连杆不能因为重力或负载作用而下垂，也就是说，我们希望在各种载荷情况下对连杆的Denavit-Hartenberg描述都是固定不变的。其次，结构与驱动系统的柔性会导致**共振**，这会对操作臂的性能产生不利的影响。在这一节中，将讨论刚度以及由于载荷作用而产生的变形问题。在第9章中再讨论共振问题。

并联和串联的柔性元件

容易看出（见习题8.21），两个刚度为k_1、k_2的“并联连接的”柔性元件的组合刚度为

$$k_{\text{parallel}} = k_1 + k_2 \tag{8-13}$$

如果是“串联连接”，则组合刚度为

$$\frac{1}{k_{\text{series}}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \tag{8-14}$$

在研究传动系统时，通常会遇到一级减速系统或者传动系统与下一级减速系统或者传动系统串联的情况，因此（8-14）式是很有用的。

轴

一种常见的方式是通过轴传递旋转运动，圆截面轴的扭转刚度为[19]

$$k = \frac{G\pi d^4}{32l} \tag{8-15}$$ 246~247

式中，d为轴径，l为轴长，G是剪切弹性模量（钢材约为$7.5\times10^{10}\text{Nt/m}^2$，铝约为钢的1/3）。

齿轮

尽管齿轮的刚度较大，但仍会在驱动系统中产生一定的柔性。近似估算输出齿轮（假设输入齿轮固定）的刚度为[20]

$$k = C_g b r^2 \tag{8-16}$$

式中，b为齿宽，r为输出齿轮半径，钢材的$C_g=1.34\times10^{10}\text{Nt/m}^2$。

在齿轮传动中，通过参数η^2来改变驱动系统的有效刚度。如果减速之前（即输入端）传动系统的刚度是k_i，那么

$$\tau_i = k_i\delta\theta_i \tag{8-17}$$

减速以后输出端的刚度为k_0，那么

$$\tau_o = k_o\delta\theta_o \tag{8-18}$$

这样就可以得到k_i与k_0的关系（假设为理想刚性齿轮副）

$$k_o = \frac{\tau_o}{\delta\theta_o} = \frac{\eta k_i \delta\theta_i}{(1/\eta)\delta\theta_i} = \eta^2 k_i \tag{8-19}$$

因此齿轮减速可以增大刚度η^2倍。

例8.3

轴的扭转刚度是500.0Nt-m/rad，与齿轮转动装置中的输入端相连，$\eta=10$，输出齿轮（输入齿轮固定）的刚度是5000.0Nt-m/rad，求驱动系统的输出刚度。

利用式（8-14）和式（8-19），可得

$$\frac{1}{k_{series}} = \frac{1}{5000.0} + \frac{1}{10^2(500.0)} \tag{8-20}$$

$$k_{series} = \frac{50000}{11} \cong 4545.4 \text{ Nt m/rad} \tag{8-21}$$

在具有多级传动的系统中，如果最后一级的传动比很大，那么在这级传动之前的刚度通
248 常可以忽略。

带

在如图8-15所示的带传动中，其刚度为

$$k = \frac{AE}{l} \tag{8-22}$$

式中，A为带的横截面积，E为带的弹性模量，l是两带轮之间带的自由长度再加上1/3的带与带轮的接触长度[19]。

连杆

为了对连杆的刚度进行近似处理，这里把单连杆视为悬臂梁，计算其端点的刚度，如图8-17。对于中空的圆截面梁，其刚度为[19]

$$k = \frac{3\pi E(d_o^4 - d_i^4)}{64 l^3} \tag{8-23}$$

式中，d_i、d_o分别为该管状梁的内径与外径，l为杆长，E为杆的弹性模量（钢材约为2×10^{11}Nt/m²，铝约为钢的1/3）；对于方截面中空梁，其刚度为

$$k = \frac{E(w_o^4 - w_i^4)}{4 l^3} \tag{8-24}$$

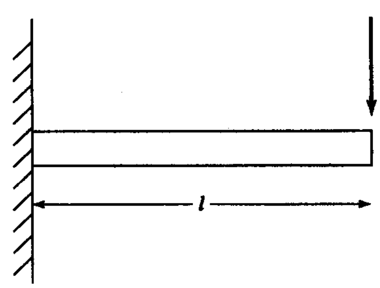


图8-17 简单悬臂梁用来模拟一端承受载荷的连杆刚度

式中，w_i、w_o分别为梁的内侧与外侧的宽度（也就是壁厚为$w_o - w_i$）。

例8.4

一个5×5×50cm的方截面连杆，壁厚1cm，由一组η=10的刚性齿轮驱动，输入齿轮由直

径0.5cm、长30cm的轴驱动。试求当100Nt的力作用在杆端时，杆端的变形。 249

由（8-24）式计算得到连杆的刚度为

$$k_{\text{link}}=\frac{(2\times10^{11})(0.05^4-0.04^4)}{4(0.5)}\cong3.69\times10^5 \tag{8-25}$$

因此，对于100Nt的载荷，连杆自身的变形为

$$\delta x=\frac{100}{k_{\text{link}}}\cong2.7\times10^{-4}\,\text{m} \tag{8-26}$$

另外，100Nt载荷作用在50cm长的连杆末端，对输出齿轮上产生的扭矩为50Nt-m。尽管齿轮是刚性的，但是输入轴的变形为

$$k_{\text{shaft}}=\frac{(7.5\times10^{10})(3.14)(5\times10^{-3})^4}{(32)(0.3)}\cong15.3\,\text{Nt m/rad} \tag{8-27}$$

从输出齿轮一端看

$$k'_{\text{shaft}}=(15.3)(10^2)=1530.0\,\text{Nt}-\text{m/rad} \tag{8-28}$$

50Nt-m载荷产生的角变形为

$$\delta\theta=\frac{50.0}{1530.0}\cong0.0326\,\text{rad} \tag{8-29}$$

所以，杆端的总线性变形为

$$\delta x\cong0.027+(0.0326)(50)=0.027+1.630=1.657\text{cm} \tag{8-30}$$

在求解过程中，假设轴和连杆的材料是钢。两者的刚度对于弹性模量E是线性的，所以对于铝而言，只要将上面的结果乘以3就可以了。

在本节中，研究了齿轮、轴、带以及连杆的刚度的简单估算公式。这些公式可以用来确定结构元件与传动元件尺寸。然而在实际应用中，很多变形的因素是难以建模的。通常情况下，传动系统会比操作臂的连杆产生更大的变形。此外，在驱动系统中很多变形的因素在这里还未考虑到（如：轴承的变形、驱动器支座的变形等）。总之，由于很多变形因素没有被考虑进去，任何对刚度的估算总是偏高的。

有限元技术可以用来更准确地估算更真实的结构元件的刚度（以及其他特性）。这本身就是一个研究领域[21]，并且超出了本书的研究范围。

驱动器

在各类驱动器中，**液压缸**和**气动驱动器**在早先常用于操作臂驱动，它们的结构相对紧凑，能产生足够的力来驱动关节而无需减速系统。其工作速度取决于泵和储能系统，通常它们距离操作臂较远。液压系统的位置控制原理容易理解，而且比较直观。所有的早期工业机器人以及现代大型机器人都采用液压系统驱动。 250

然而，液压系统往往需要很多设备，比如：泵、储能器、管路、伺服阀等等。而且液压系统一般容易污染，在某些场合中不便应用。随着更加先进的机器人控制技术的出现，要求

施加的驱动力必须精确，而液压系统由于其密封装置而带来的摩擦使它们不适于进行精确的力控制。

气缸具有液压缸的各种优点，而且由于渗漏出的是气体而不是液体，所以比液压缸干净。然而，由于气体的可压缩性以及密封造成的较大摩擦，使得气压驱动器很难实现精确的控制。

电动机是操作臂上最常用的驱动器。尽管它们的功率-重量比特性不如液压或者气动驱动器，但由于电动机的可控性好而且接口简单，所以被广泛用于中小型操作臂上。

直流(DC)有刷电动机（见图8-18）的接口与控制都十分简单。电流通过与换向器相连的电刷流入转子绕组。电刷的磨损与摩擦会带来一定的问题。新的磁性材料可以产生更大的峰值扭矩。限制这类电动机输出扭矩的因素是绕组过热。如果短时间运行，则可获得更大扭矩，但在长期运行时则只能提供较小的扭矩。

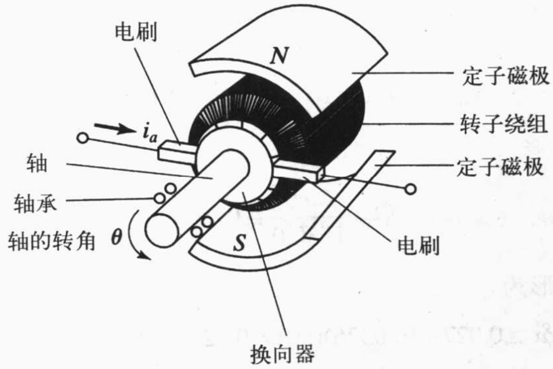


图8-18 在操作臂设计中最常用的直流有刷电动机。参见Franklin, Powell和Emami-Naeini所著的《*Feedback Control of Dynamic Systems*》，©1988, Addison-Wesley，研究生教材。准许使用

251

无刷电机解决了电刷磨损和摩擦的问题。它的绕组固定不动而磁场旋转。转子上的传感器检测轴的转角，然后通过外部电子元件实现换向。无刷电动机的另一个优点是其绕组位于外侧，附在电机壳上，便于冷却。所以，连续额定扭矩比类似尺寸的有刷电机要大一些。

交流(AC)电机和步进电机偶尔也用于工业机器人。但是，前者难以控制而后者只能提供较低的扭矩，这些都限制了它们的应用。

8.8 位置检测

实际上所有的操作臂都是伺服控制的机构，也就是说，传输给驱动器的力或力矩指令都是根据检测到的关节位置与期望位置之间的差值而给定的。这就要求每个关节都要有一定的位置检测装置。

最常用的方法是把位置传感器直接安装在驱动器的轴上。如果传动系统是刚性的，而且没有回差间隙，那么便可以根据驱动器轴的位置计算得到真实的关节转角。这种**并置**的传感器与驱动器组合非常容易控制。

旋转光学编码器是最常用的位置反馈装置。当编码器的轴旋转时，刻有细线的圆盘会遮住光束。光电探测器把这些光脉冲转化成二进制波形。通常有两个相位差为90°的脉冲输出通道。轴的转角通过计算脉冲数得到，转动方向由这两个方波信号的相对相位决定。此外，编

码器可以在某个位置输出**特征脉冲**，作为计算绝对角度的零位。

感应同步器输出两个模拟信号——一个是轴转角的正弦信号，另一个是余弦信号。轴的转角由这两个信号的相对幅值计算得到。其分辨率是感应同步器的品质因数以及从电子元件和电缆中产生的噪声的函数。感应同步器一般比编码器可靠，但它的分辨率较低。通常，如果感应同步器上没有附加齿轮机构以提高分辨率的话，则不能将其直接安装在关节上。

电位计是最直接的位置检测形式。它连接在电桥中，能够产生与轴转角成正比的电压信号。然而，由于分辨率低、线性不好以及对噪声敏感，所以限制了电位计的应用范围。

转速计能够输出与轴的转速成正比的模拟信号。如果没有这样的速度传感器，可以通过对检测到的位置相对于时间的差分得到速度反馈信号。这种**数值微分**会产生噪声和延时。不过，即使存在这些问题，绝大多数操作臂仍然没有使用这种直接检测速度的装置。 252

8.9 力检测

很多装置都可以用来测量操作臂末端执行器与其接触的工作环境之间的接触力。这类传感器大多数都使用了由半导体或者金属箔制作的检测元件，称为**应变计**。这些应变计被粘贴在金属结构上，能够产生与金属变形成正比的输出信号。在设计这种力传感器时，设计者必须考虑以下问题:

1. 需要多少个传感器才能分辨出所期望的信息?
2. 如何在被测量的结构上确定这些传感器的相对安装位置?
3. 什么样的结构既能保证良好的灵敏度又能保证刚度?
4. 如何在传感装置内部设置机械过载保护装置?

力传感器通常安装在操作臂下述三个位置:

1. 安装在关节驱动器上。这些传感器测量驱动器/减速器自身的力矩或者力的输出。这种方式在某些控制方案中是有效的，但是并不能很好地检测末端执行器与环境之间产生的接触力。

2. 安装在末端执行器与操作臂的终端关节之间。这些传感器通常被称作**腕力传感器**。它们是一些安装了应变计的机械装置，可以测量施加于末端执行器上的力和力矩。通常，这些传感器可以测量施加于末端执行器上的三个到六个力/力矩分量。

3. 安装在末端执行器的“指尖”上。通常，这些带有力觉的手指内置了应变计，可以测量作用在指尖上的一个到四个分力。

例如，图8-19所示为由Scheinman[22]设计的一种常用的腕力传感器的内部结构。8对半导体应变计贴在这个装置的十字轴上。每对应变计按照分压器形式连线。每次查询腕力传感器的参数时，8个模拟电压值被转换成数字信号并读入计算机。**标定矩阵**是一个6 × 8的常量矩阵，用于把8个应力测量值转换成作用在末端执行器上的力－力矩矢量F。这个被检测到的力-力矩矢量可以被转换到我们关心的参考坐标系中，参见例5.8。

力传感器的设计问题

使用应变计测量力是依靠测量受压后的**挠曲**变形来实现的。因此，在设计力传感器时，首先要权衡刚度与灵敏度之间的关系。这是因为刚度较高的传感器一般灵敏度较低。

此外，传感器的刚度也会对其**过载保护**装置产生影响。应变计可能会受到冲击载荷而损坏，所以必须具有过载保护装置。可以使用**限位挡块**避免传感器的损坏，限位挡块能够防止 253

被测的挠曲变形超过某一规定点。遗憾的是，刚度好的传感器只允许万分之几英寸的变形。然而，制造这么小间隙的限位挡块是非常困难的。因此，很多传感器都具有一定的柔性，以实现有效的限位。

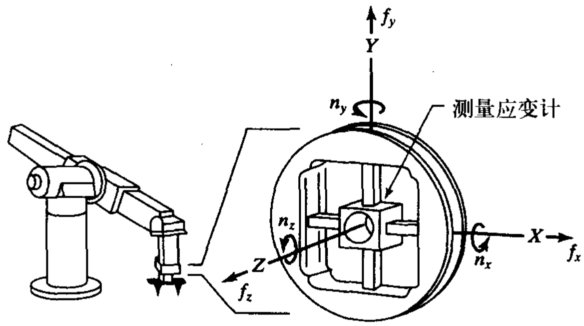


图8-19 一类典型的腕力传感器的内部结构

在设计传感器时，消除滞后现象是一件很麻烦的事情。如果没有过载的话，大多数用于产生挠曲变形的金属具有很小的滞后。然而，在发生挠曲变形的位置附近的螺栓联接、过盈配合或者焊接关节都会产生滞后。理想情况下，发生挠曲变形的部分及其附近的部分应使用同一块金属制成。

采用差分测量的办法对提高力矩传感器的线性度和抗干扰能力是非常重要的。利用传感器的不同物理构形能够消除由于温度效应和偏心力所带来的影响。

金属箔式应变计相对耐用，然而在整个量程范围内只能产生一个很小的电阻变化。因此，为了使金属箔式应变计具有良好的动态测量范围，消除应变计的电缆和放大电路中的噪声是至关重要的。

半导体应变计在过载情况下非常容易造成损坏。但它的优点是，在给定应力下，半导体应变计能够产生相当于约70倍的金属箔式应变计的电阻变化。对于给定的动态测量范围，半导体应变计的信号处理工作将变得十分简单。

参考文献

[1] W. Rowe, Editor, *Robotics Technical Directory 1986*, Instrument Society of America, Research Triangle Park, NC, 1986.

[2] R. Vijaykumar and K. Waldron, "Geometric Optimization of Manipulator Structures for Working Volume and Dexterity," *International Journal of Robotics Research*, Vol. 5, No. 2, 1986.

254 [3] K. Waldron, "Design of Arms," in *The International Encyclopedia of Robotics*, R. Dorf and S. Nof, Editors, John Wiley and Sons, New York, 1988.

[4] T. Yoshikawa, "Manipulability of Robotic Mechanisms," *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 4, No. 2, MIT Press, Cambridge, MA, 1985.

[5] H. Asada, "Dynamic Analysis and Design of Robot Manipulators Using Inertia Ellipsoids," *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics*, Atlanta, March 1984.

[6] J.K. Salisbury and J. Craig, "Articulated Hands: Force Control and Kinematic Issues," *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 1, No. 1, 1982.

[7] O. Khatib and J. Burdick, "Optimization of Dynamics in Manipulator Design: The Operational Space Formulation," *International Journal of Robotics and Automation*, Vol. 2, No. 2, IASTED, 1987.

[8] T. Yoshikawa, "Dynamic Manipulability of Robot Manipulators," *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, St. Louis, March 1985.

[9] J. Trevelyan, P. Kovesi, and M. Ong, "Motion Control for a Sheep Shearing Robot," *The 1st International Symposium of Robotics Research*, MIT Press, Cambridge, MA, 1984.

[10] P. Marchal, J. Cornu, and J. Detriche, "Self Adaptive Arc Welding Operation by Means of an Automatic Joint Following System," *Proceedings of the 4th Symposium on Theory and Practice of Robots and Manipulators*, Zaburow, Poland, September 1981.

[11] J.M. Hollerbach, "Optimum Kinematic Design for a Seven Degree of Freedom Manipulator," *Proceedings of the 2nd International Symposium of Robotics Research*, Kyoto, Japan, August 1984.

[12] K. Waldron and J. Reidy, "A Study of Kinematically Redundant Manipulator Structure," *Proceedings of the IEEE Robotics and Automation Conference*, San Francisco, April 1986.

[13] V. Milenkovic, "New Nonsingular Robot Wrist Design," *Proceedings of the Robots 11 / 17th ISIR Conference*, SME, 1987.

[14] E. Rivin, *Mechanical Design of Robots*, McGraw-Hill, New York, 1988.

[15] T. Yoshikawa, "Manipulability of Robotic Mechanisms," in *Proceedings of the 2nd International Symposium on Robotics Research*, Kyoto, Japan, 1984.

[16] M. Leu, V. Dukowski, and K. Wang, "An Analytical and Experimental Study of the Stiffness of Robot Manipulators with Parallel Mechanisms," in *Robotics and Manufacturing Automation*, M. Donath and M. Leu, Editors, ASME, New York, 1985.

[17] K. Hunt, *Kinematic Geometry of Mechanisms*, Cambridge University Press, Cambridge, MA, 1978.

[18] H. Asada and K. Youcef-Toumi, *Design of Direct Drive Manipulators*, MIT Press, Cambridge, MA, 1987.

[19] J. Shigley, *Mechanical Engineering Design*, 3rd edition, McGraw-Hill, New York, 1977.

[20] D. Welbourne, "Fundamental Knowledge of Gear Noise—A Survey," *Proceedings of the Conference on Noise and Vibrations of Engines and Transmissions*, Institute of Mechanical Engineers, Cranfield, UK, 1979.

[21] O. Zienkiewicz, *The Finite Element Method*, 3rd edition, McGraw-Hill, New York, 1977. 255

[22] V. Scheinman, "Design of a Computer Controlled Manipulator," M.S. Thesis, Mechanical Engineering Department, Stanford University, 1969.

[23] K. Lau, N. Dagalakis, and D. Meyers, "Testing," in *The International Encyclopedia of Robotics*, R. Dorf and S. Nof, Editors, John Wiley and Sons, New York, 1988.

[24] M. Roshiem, "Wrists," in *The International Encyclopedia of Robotics*, R. Dorf and S. Nof, Editors, John Wiley and Sons, New York, 1988.

[25] A. Bowling and O. Khatib, "Robot Acceleration Capability: The Actuation Efficiency Measure," *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, San Francisco, April 2000.

习题

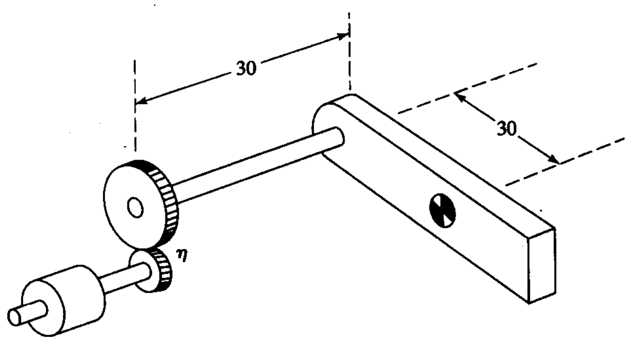
8.1 [15]一个机器人用于对一个激光切割装置进行定位。激光产生定点的、不发散的光束。对于一般的切割任务，机器人需要多少个自由度才能为其定位？并验证你的答案。

8.2 [15]画出习题8.1中激光定位机器人的一种可能的关节位形，假定该机器人主要被用来以不固定的角度切割1in厚、8 × 8ft的金属板。

8.3 [17]对于一个如图8-6所示的球面坐标机器人，如果关节1和关节2没有限制，关节3有下限l和上限u，求出该机器人腕关节点处的结构长度指数Q_L。

8.4 [25]一根长30cm、直径0.2cm的钢轴驱动减速器的输入齿轮，传动比$\eta=8$。输出齿轮驱动一根长30cm、直径0.3cm的钢轴。假设齿轮本身没有柔性，那么整个传动系统的总体刚度是多少？

8.5 [20]在图8-20中，由一根经齿轮减速后的轴驱动一个连杆。把该连杆视为刚体，假定10Kg的质量集中在距离传动轴线30cm处的连杆上。假设齿轮的刚度和减速器的传动比η都很大。轴的材料为钢，而且其长度为30cm。如果要求设计指标为连杆质心能承受2.0g的加速度，那么其轴径为多少时可以限制轴关节角的动态变形在0.1 rad以内？



256 图8-20 经过齿轮减速后的轴驱动连杆

8.6 [15]如果输出齿轮的刚度为1000Nt-m/rad，输入齿轮固定，轴的刚度为300Nt-m/rad，那么图8-20所示驱动系统的综合刚度是多少？

8.7 [43]串联式连杆操作臂的Pieper判据指出，如果三个相邻的轴线相交于一点或者平行，则操作臂是可解的。这个判据是基于这样的想法，腕关节坐标原点的位置与腕部坐标系的姿态是相互独立的，所以其逆运动学是解耦的。请针对图8-14中的Stewart机构也提出一个类似的结论，使其正向运动学同样是解耦的。

8.8 [20]如果跟基座相连的2自由度万向关节被替换成3自由度的球铰关节，利用Grübler公式计算图8-14所示的Stewart机构的自由度总数。

8.9 [22]图8-21所示为PUMA 560机器人关节4的驱动系统简图[23]。每个联轴器的扭转刚度是100 Nt-m/rad，轴的扭转刚度是400Nt-m/rad，当输入齿轮固定时，每对齿轮的输出刚度是2000 Nt-m/rad。两级齿轮传动的传动比均为6。⊖假设结构和轴承的刚度足够大，求关节的刚度（即：当电机轴被锁定时）。

⊖ 在这个习题中，所有的数值都不是实际值！

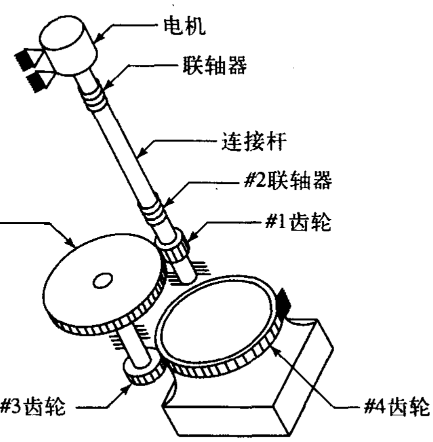


图8-21 PUMA 560操作臂中关节4的传动轮系简图（摘自[23]），摘自R.Dorf和S, Nof（编者）编写的《国际机器人百科全书》和K.Law, N.Dagalakis和D.Myers编写的《测试》

8.10 [25]如果在习题8.9中只考虑最后一级减速齿轮的刚度，那么这个近似答案的误差是多少？

8.11 [20]图4-14展示了一个正交轴腕关节和一个非正交轴腕关节。正交轴腕关节连杆的扭转角度为90°，非正交轴连杆的扭转角度为ϕ和180° − ϕ。给出非正交轴机构不能到达的姿态。假设所有的轴都可以旋转360°，如果需要，各杆可以相交（即工作空间不受自身碰撞的限制）。 257

8.12 [18]写出图8-22所示的Stewart机构的广义逆向运动学解。已知相对于基坐标系{B}的{T}的位置，求解关节的位置变量$d_1 \sim d_6$。${}^Bp_i$ 是3 × 1的矢量，给出了相对于坐标系{B}的直线驱动器与基座连接的位置。${}^Tq_i$ 也是3 × 1的矢量，给出了相对于坐标系{T}的直线驱动器与上平台连接的位置。

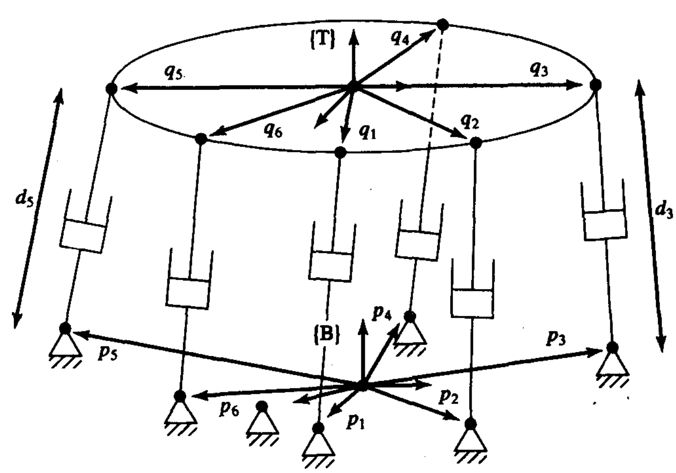


图8-22 习题8.12的Stewart机构

8.13 [20]例5.3中的平面两杆操作臂的雅可比行列式是

$$\det(J(\Theta)) = l_1 l_2 s_2 \tag{8-31}$$

如果两杆的长度之和l_1+l_2是一个常量，要使操作臂（按照式（8-6）所定义）的可操作度最大，那么这两个杆的相对长度是多少？

8.14 [28]对于SCARA机器人，已知连杆1和连杆2的长度之和为一常量，按照式（8-6）给出的可操作度指标，求这两个连杆的最佳相对长度是多少？先解答习题8.13对解答此题有帮助。

8.15 [35]证明式（8-6）定义的可操作度等于$J(\Theta)$的特征值的乘积。

8.16 [15]求长40cm、半径0.1cm铝棒的扭转刚度。

8.17 [5]如果一个带传动系统的输入轮半径为2.0cm，输出轮半径为12cm，求有效传动比。

8.18 [10]为了把圆柱形零件放到平面上，操作臂需要多少个自由度？假设：该圆柱形零件相对于主轴完全对称。

8.19 [25]图8-23所示为一个三指机械手抓取一个物体。每个手指有3个单自由度的关节。指端与物体的接触可看作是“点接触”，也就是说，该接触点的位置是固定的，但是这3个自
258 由度的姿态是自由的。因此，在分析的过程中，这些点接触可以用3自由度的球铰关节代替。应用Grübler公式计算整个系统有多少个自由度。

8.20 [23]如图8-24，一个物体通过3根杆与地面相连。每根杆通过一个2自由度万向关节与这个物体相连，通过一个3自由度的球铰关节与地面相连。这个系统有多少个自由度？

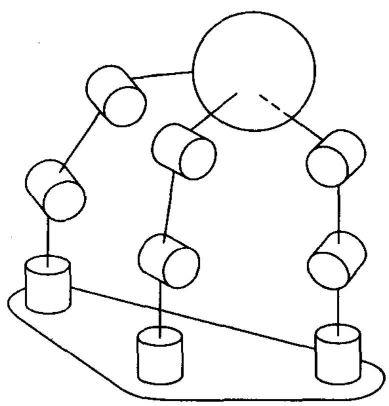


图8-23 每个手指有三个自由度的三指机械手通过“点接触”抓取一个物体

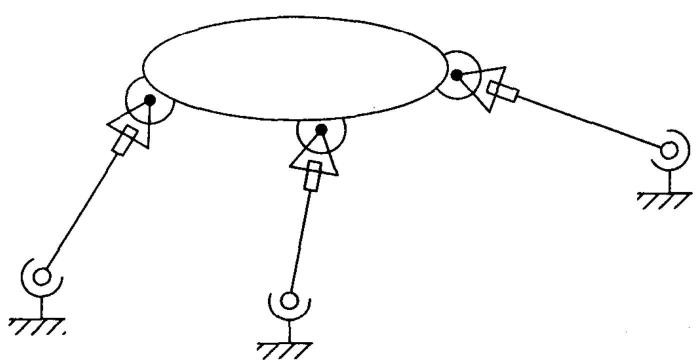


图8-24 习题8.20中的闭环机构

8.21 [18]证明：如果两个传动系统串联，那么这个系统的等效刚度由式（8-14）给定。也许这样考虑是最简单的，即两个刚度系数为k_1、k_2的线性弹簧串联，相应的方程是 259

$$
\begin{aligned}
f &= k_1 \delta x_1 \\
f &= k_2 \delta x_2 \\
f &= k_{\text{sum}}(\delta x_1 + \delta x_2)
\end{aligned}
\tag{8-32}
$$

8.22 [20]由式（8-22），推导两带轮半径为r_1和r_2、中心距为d_c的带传动系统的刚度公式。

编程习题

1. 编写一个计算3 × 3阶矩阵的行列式的程序。
2. 编写一个程序，使模拟的三连杆机器人以固定的姿态沿直线行走20步，起始位置为：

$$
{}^0_3T = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}
$$

终止位置为：

$$
{}^0_3T = \begin{bmatrix} 0.95 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}
$$

步长为0.05m。在每一个位置处，计算机器人在该位形下的可操作度（即：Jacobian行列式）。以表格的形式列出或者最好画出当机器人沿 $\hat{X}_0$ 方向运动时位置函数的可操作度值。针对下面两种情况和前面的数据进行计算：

(a) $l_1 = l_2 = 0.5$m

(b) $l_1 = 0.625$m, $l_2 = 0.375$m

你认为哪一种操作臂的设计方案更好，并解释理由。

MATLAB习题

8.5节介绍了运动学冗余机器人的概念。本练习将要对运动学冗余机器人进行分步速度控制的仿真。这里主要考虑平面4自由度机器人，它有一个冗余自由度（四个关节提供了三个笛卡儿空间的运动：两个移动和一个转动）。这个机器人可以通过在原来的平面3自由度的3R机器人（图3-6和图3-7）上再添加第4个转动关节和第4个运动连杆L_4得到（需要在图3-8上再添加一行DH参数）。

对于这个平面4R机器人，推导出3 × 4阶雅可比矩阵的解析表达式。然后使用MATLAB进行分步速度控制的仿真运算（与第5章MATLAB习题相似）。速度方程的形式还是 ${}^k\dot{X}={}^kJ\dot{\Theta}$；但是这个方程不能使用普通的矩阵求逆方法来解，因为这个雅克比矩阵不是方阵（3个方程，4个未知数，$\dot{\Theta}$有无穷多个解）。因此可以使用雅克比矩阵的Moore-Penrose伪逆矩阵 J^*：$J^* = J^T(JJ^T)^{-1}$ 求解。为了在分步速度算法中求出相应的关节速度 $\dot{\Theta}={}^kJ^{*k}\dot{X}$，在这里从无穷多个解中选取最小范数解（即：该解 $\dot{\Theta}$是所有能够满足笛卡儿速度 ${}^k\dot{X}$ 的最小解）。 260

这个解只是一个特解，也就是说，在满足所要求的笛卡儿运动的同时，存在一个齐次解

可以用来优化性能（如：避开操作臂的奇异位形或者避开关节限制）。不过，如何优化性能已经超出了本练习的范围。

已知：L_1=1.0m, L_2=1.0m, L_3=0.2m, L_4=0.2m。

初始角度为：

$$\Theta=\begin{Bmatrix}\theta_1\\\theta_2\\\theta_3\\\theta_4\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-30^\circ\\70^\circ\\30^\circ\\40^\circ\end{Bmatrix}$$

要求的笛卡儿运动速度（为常量）为：

$${}^0\dot{X}={}^0\begin{Bmatrix}\dot{x}\\\dot{y}\\\omega_z\end{Bmatrix}={}^0\begin{Bmatrix}-0.2\\-0.2\\0.2\end{Bmatrix}\ (\text{m/s, rad/s})$$

只使用特解对分步速度控制的运动进行仿真，仿真时间为3s，控制时间步长为0.1s。另外，在同一个循环中，动画显示机器人在每一个时间步长中的运动，这样便能观察仿真的运动是否正确。

a) 绘制4个曲线图（每组曲线单独绘制在一个图上）：

1. 第四个关节随时间的运动角度(deg) $\Theta=\{\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4\}^T$；
2. 第四个关节随时间的运动速度(rad/s) $\dot{\Theta}=\{\dot{\theta}_1,\dot{\theta}_2,\dot{\theta}_3,\dot{\theta}_4\}^T$；
3. 关节速度的欧式范数形式随时间的变化规律 $\|\dot{\Theta}\|$（矢量的模）；
4. ${}^0_HT$ 的三个笛卡儿分量随时间的变化规律，$X=\{x,y,\phi\}^T$（选ϕ的单位为rad）。

在每个图中仔细标注每个分量（最好用手工标注！），同时标注各轴线的名称与单位。

b) 利用Corke MATALAB Robotics工具箱检查一系列起始和终止关节角的雅可比矩阵的结果。试用*jacobn*()函数。**注意**：在这个问题中，雅可比函数工具箱适用于求解坐标系{4}相对于坐标系{0}的运动，而不适用于求解坐标系{*H*}相对于坐标系{0}的运动。前
261 面的函数给出了坐标系{0}中雅可比矩阵的结果，而*jacobn*()给出了坐标系{4}中的结果。

第9章 操作臂的线性控制

9.1 概述

基于前面章节的知识，现在可以计算关节位置的时间历程，这些关节位置对应于末端执行器通过空间的期望运动。在本章中，我们将讨论如何才能使操纵臂实际完成这些期望运动。

本章讨论的控制方法属于**线性控制**系统的范畴。严格讲，线性控制技术仅适用于能够用线性微分方程进行数学建模的系统。对于操作臂的控制，这种线性方法实质上是一种近似方法，因为在第6章我们已看到，操作臂的动力学方程一般都是由非线性微分方程来描述的。但是，通常进行这种近似是可行的，而且这些线性方法是当前工程实际中最常用的方法。

最后，线性方法可作为第10章中处理更加复杂的非线性控制系统的基础。尽管我们将线性控制作为操作臂控制的一种近似方法，但是采用线性控制却并不仅仅是出于经验的原因。第10章中将证明即使不进行操纵臂动力学的线性近似，线性控制器也可作为一种比较合理的控制系统。熟悉线性控制系统的读者可以跳过本章的前4节。 262

9.2 反馈与闭环控制

我们将操作臂看作一个机构，在这个机构的每个关节处安装一个用来测量关节角的传感器和一个能够对相邻连杆（高序号连杆）施加扭矩的驱动器。[⊖]虽然有时也采用其他方式的传感器配置，但大多数机器人在每一个关节处都有一个位置传感器。有时在关节处还安装速度传感器（测速计）。尽管各种驱动和传动方式普遍应用在工业机器人中，但是如果假定每个关节处只有一个独立的驱动器，那么我们就能够建立这些驱动和传动方式的模型。

我们希望操作臂关节沿着指定的位置轨迹运动，而驱动器是按照扭矩的指令运动，因此我们必须应用某种**控制系统**计算出适当的驱动指令去实现这个期望运动。而这些期望的扭矩主要是由关节传感器的**反馈**计算出来的。

图9-1表示了轨迹生成器和机器人的关系。机器人从控制系统接收到一个关节扭矩矢量τ，操作臂传感器允许控制器读取关节位置矢量Θ和关节速度矢量$\dot{\Theta}$。图9-1中的所有信号线中的信号均为$N\times 1$维矢量（N为操作臂的关节数）。

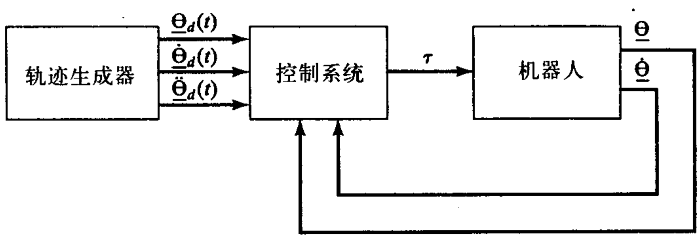
让我们看一下图9-1中标有“控制系统”的模块能够进行哪些运算。一种可能是用机器人的动力学方程（见第6章）去计算一条特定轨迹所需的扭矩。由轨迹生成器给定Θ_d，$\dot{\Theta}_d$和$\ddot{\Theta}_d$，于是可以用式（6.59）计算

$$\tau = M(\Theta_d)\ddot{\Theta}_d + V(\Theta_d,\dot{\Theta}_d) + G(\Theta_d) \tag{9-1}$$

上式可按照指定的模型计算出所需的扭矩以实现期望轨迹。如果动力学模型是完备和精确的，且没有“噪声”或者其他干扰存在，沿着期望轨迹连续应用式（9-1）即可实现期望的轨迹。

⊖ 注意，所有关于转动关节的标注对于移动关节也是有效的，反之亦然。

然而在实际情况中由于动力学模型的不完备以及不可避免的干扰使得这个方案并不实用。这种控制技术称为**开环**控制方式，因为这种控制方式没有利用关节传感器的反馈。(即式（9-1）是期望轨迹Θ_d和Θ_d导数的函数，而不是实际轨迹Θ的函数)。



263 图9-1　机器人高阶控制系统框图

总之，建立一个高性能的控制系统的唯一方法就是利用关节传感器的反馈，如图9-1所示。这个反馈一般是通过比较期望位置和实际位置之差以及期望速度和实际速度之差来计算**伺服误差**:

$$
\begin{aligned}
E &= \Theta_d - \Theta \\
\dot{E} &= \dot{\Theta}_d - \dot{\Theta}
\end{aligned}
\tag{9-2}
$$

这样控制系统就能够根据伺服误差函数计算驱动器需要的扭矩。显然，这个基本思想是通过计算驱动器的扭矩来减少伺服误差。这种利用反馈的控制系统称为**闭环**系统。从图9-1中可以清楚地看出操作臂的控制系统形成了一个封闭的“环”。

设计一个控制系统的核心问题是保证设计的闭环系统满足特定的性能要求。最基本的标准是系统要保持**稳定**。为此，一个稳定系统的定义是机器人在按照各种期望规迹运动时系统的误差始终保持“较小”，即使存在一些“中度”的干扰。注意，一个设计不合理的控制系统有时会使系统的性能**不稳定**，在这个系统中，伺服误差增大而不是减少。因此，一个控制系统设计者的首要任务是要证明他（她）设计的系统是一个稳定的系统；其次是要保证这个闭环系统的性能满足要求。实际上， 这些“证明”包括了那些基于某些假设和模型的数学证明以及从仿真或试验中得到的经验结果。

图9-1中，所有信号线表示$N \times 1$维矢量，因此，操作臂的控制问题是一个**多输入多输出**（MIMO）控制问题。在本章中，我们采用一种简单的方法建立一个控制系统，即把每个关节作为一个独立系统进行控制。因此，对于N个关节的操作臂来说，要设计N个独立的**单输入单输出**（SISO）控制系统。这是目前为大部分工业机器人供应商所采用的设计方法。这种**独立关节控制**方法是一种近似方法，这个系统的运动方程（第6章得出的）不是独立的，而是高度耦合的。本章在后面将给出线性方法的证明，至少是关于高度耦合的操作臂的证明。

9.3　二阶线性系统

在讨论操作臂的控制问题之前，我们先以一个简单的机械系统为例开始讨论。图9-2表示一个质量为m的质量块连接在一个刚度为k的弹簧上、摩擦系数为b，图9-2中还标出了质量块的零位和x轴的正方向。假定摩擦力与质量块的速度成正比，由质量块的受力图可以直接得出运动方程，

$$m\ddot{x}+b\dot{x}+kx=0 \tag{9-3}$$ 264

因此，这个单自由度系统的开环动力学问题便可由一个二阶线性常系数微分方程[1]描述。微分方程（9-3）的解$x(t)$是关于时间的函数，它确定了质量块的运动。方程的解取决于质量块的**初始条件**，即初始位置和初始速度。

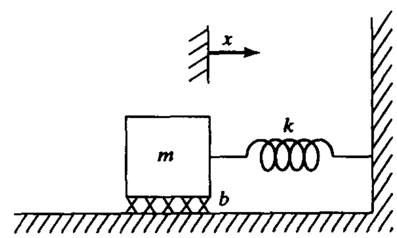


图9-2 具有摩擦的质量-弹簧系统

我们以这个简单的机械系统为例来回顾一些控制系统的基本概念。但是，仅通过这里的简单介绍不可能解释清楚控制理论领域中的全部问题。在我们讨论控制问题时，仅要求学生们熟悉简单的微分方程即可。因此我们不会用到控制工程领域中许多常用的工具。例如，**拉普拉斯变换**以及其他常用的技术即不是必备的知识也不需要在这里介绍。有关控制领域的参考文献请参见[4]。

图9-2的系统直观地表示出几个不同特征的运动。例如，假设弹簧刚度很小（即k很小）而摩擦力很大（即b很大），当质量块受到扰动离开平衡位置后，它将以缓慢的衰减运动方式回到平衡位置。相反如果弹簧刚度很大而摩擦力很小，质量块将经过几次振荡才能回到平衡位置。出现这几种不同情况的原因是由于方程（9-3）的解的特性取决于参数m、b和k的值。

由微分方程的研究[1]可知方程（9-3）的解的形式与**特征方程**的根有关，

$$ms^2+bs+k=0 \tag{9-4}$$

方程的根为:

$$\begin{aligned} s_1&=-\frac{b}{2m}+\frac{\sqrt{b^2-4mk}}{2m}\\ s_2&=-\frac{b}{2m}-\frac{\sqrt{b^2-4mk}}{2m} \end{aligned} \tag{9-5}$$

s_1和s_2在复平面中的位置（有时称作系统的**极点**）代表系统的运动特性。如果s_1和s_2为实根，那么系统将呈现衰减运动而没有振荡；如果s_1和s_2为复根（即虚部存在），那么系统将出现振荡。265
如果包括这两种情况之间的极限情况，将有三种情况需要研究:

1. **两个不相等的实根**。当$b^2>4mk$ 时的情况；即系统主要受摩擦力影响，系统将缓慢回到平衡位置。这种情况称为**过阻尼**。

2. **复根**。当$b^2<4mk$ 时的情况；即系统主要受系统弹性力的影响，系统将出现振荡。这种情况称为**欠阻尼**。

3. **两个相等实根**。当$b^2=4mk$ 时的情况；此时摩擦力与弹性力平衡，系统将以最短的时间回到平衡位置。这种情况称为**临界阻尼**。

第三种情况（临界阻尼）为期望的情况：系统在最短的时间内从非零初始位置迅速返回到平衡位置而不出现振荡。

两个不相等的实根

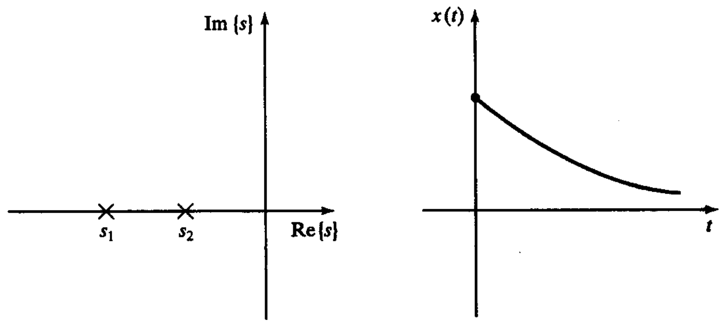
对于两个不相等的实根（直接代入式（9-3）），很容易得到质量块运动方程的解$x(t)$

$$x(t)=c_1e^{s_1t}+c_2e^{s_2t} \tag{9-6}$$

式中s_1和s_2由式（9-5）解出。系数c_1和c_2为常数，可通过任何一组已知的初始条件计算得出(即质量块的初始位置和速度)。

图9-3所示为非零初始条件下的极点位置和相应的时间响应。当一个二阶系统的极点是两个不相等的实根时，系统表现为衰减运动或者过阻尼运动。

当极点的一个值比另一个值大得多时，较大的极点值可忽略，因为与另一个极点——**主极点**相比这个极点的运动将迅速衰减到零。主极点的概念可以扩展到更高阶的系统——例如，通常可以把一个三阶系统看成是仅有两个主极点的二阶系统来进行讨论。



266 图9-3　过阻尼系统在初始条件下根的位置和响应

例9.1

求图9-2所示系统的运动。假设各参数值如下：$m=1$、$b=5$、$k=6$，质量块（初始时静止）在$x=-1$处被释放。

特征方程为

$$s^2+5s+6=0 \tag{9-7}$$

解得$s_1=-2$，$s_2=-3$。因此系统的响应为

$$x(t)=c_1e^{-2t}+c_2e^{-3t} \tag{9-8}$$

根据已知的初始条件$x(0)=-1$和$\dot{x}(0)=0$计算c_1和c_2。为了在$t=0$时满足上述条件，必须有

$$c_1+c_2=-1$$

和

$$-2c_1-3c_2=0 \tag{9-9}$$

解得$c_1=-3$，$c_2=2$。于是得出当$t \geqslant 0$时，系统的运动为

$$x(t)=-3e^{-2t}+2e^{-3t} \tag{9-10}$$

■

复根

对于特征方程有两个复根的情况

$$\begin{aligned} s_1&=\lambda+\mu i \\ s_2&=\lambda-\mu i \end{aligned} \tag{9-11}$$

这种情况下解的形式同上

$$x(t)=c_1e^{s_1t}+c_2e^{s_2t} \tag{9-12}$$

然而方程（9-12）难以直接求解，因为方程中显含虚数。由**欧拉公式**（见练习9.1）

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x \tag{9-13}$$

将式（9-12）写成如下形式

$$x(t)=c_1e^{\lambda t}\cos(\mu t)+c_2e^{\lambda t}\sin(\mu t) \tag{9-14}$$

同上，系数c_1和c_2为常数，可通过任何一组已知的初始条件计算得出（即质量块的初始位置和速度）。如果将常数c_1和c_2写成如下形式：

$$\begin{aligned}c_1&=r\cos\delta\\c_2&=r\sin\delta\end{aligned} \tag{9-15}$$

267

这样式（9-14）可以改写为

$$x(t)=re^{\lambda t}\cos(\mu t-\delta) \tag{9-16}$$

式中

$$\begin{aligned}r&=\sqrt{c_1^2+c_2^2}\\\delta&=\mathrm{A}\tan 2(c_2,c_1)\end{aligned} \tag{9-17}$$

从这个式子容易看出本式所表达的运动形式为振幅按指数形式衰减到零的振动。

另一种常用的方法是应用**阻尼比**和**固有频率**描述二阶振动系统。这两个参量是由如下的参数化特征方程定义的

$$s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2=0 \tag{9-18}$$

式中ζ为阻尼比 （介于0和1之间的无量纲数），ω_n 为固有频率⊖。极点位置与这两个参数的关系为

$$\begin{aligned}\lambda&=-\zeta\omega_n\\\mu&=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\end{aligned} \tag{9-19}$$

这两个极点的虚部μ有时被称为**阻尼振动固有频率**。对于图9-2中所示的有阻尼的质量-弹簧系统，阻尼比和固有频率分别为

$$\begin{aligned}\zeta&=\frac{b}{2\sqrt{km}}\\\omega_n&=\sqrt{k/m}\end{aligned} \tag{9-20}$$

对于无阻尼系统（本例中b=0），阻尼比为0；对于临界阻尼系统（$b^2=4km$），阻尼比为1。

图9-4所示为非零初始条件下的极点位置和相应的时间响应。当一个二阶系统的极点具有复根时，系统表现为振动或欠阻尼运动。

⊖ 阻尼比和固有频率这两个参量同样适用于过阻尼系统，此时ζ>1.0。

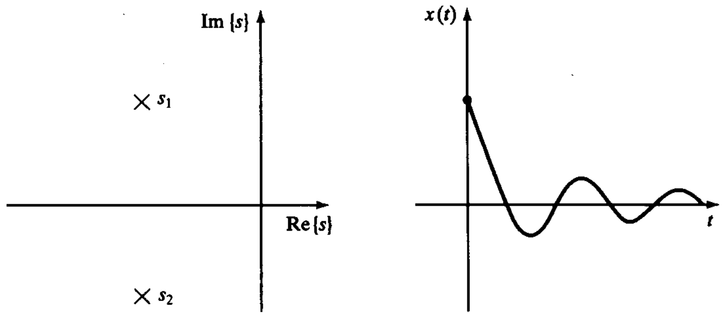


图9-4 欠阻尼系统在初始条件下根的位置和响应

例9.2

求图9-2所示系统的运动。假设各参数值如下：$m = 1$、$b = 1$、$k = 1$，质量块（初始时静止）在$x = -1$处被释放。

特征方程为

$$s^2 + s + 1 = 0 \tag{9-21}$$

解得的根为 $s_i = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$ ，因此，系统的响应为

$$x(t) = e^{-\frac{t}{2}}\left(c_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + c_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \tag{9-22}$$

根据已知的初始条件$x(0)=-1$和 $\dot{x}(0)=0$计算c_1和c_2。为了在$t = 0$时满足上述条件，必须有

$$c_1 = -1$$

和

$$-\frac{1}{2}c_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}c_2 = 0 \tag{9-23}$$

解得$c_1 = -1$， $c_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 。因此当$t \geqslant 0$时，系统的运动为

$$x(t) = e^{-\frac{t}{2}}\left(-\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{\sqrt{3}}{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \tag{9-24}$$

这个解也可以写成式（9-16）的形式

$$x(t) = \frac{2\sqrt{3}}{3} e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + 120^\circ\right) \tag{9-25}$$

两个相等的实根

将两个相等的实根（即重根）代入式（9-3），解的形式为

$$x(t)=c_1e^{s_1t}+c_2te^{s_2t} \tag{9-26}$$ 268~269

这种情况下 $s_1=s_2=-\frac{b}{2m}$，因此式（9-26）可以写成

$$x(t)=(c_1+c_2t)e^{-\frac{b}{2m}t} \tag{9-27}$$

这种情况下解是不定的，可应用洛必达法则[2]很快求出c_1、c_2和a

$$\lim_{t\to\infty}(c_1+c_2t)e^{-at}=0 \tag{9-28}$$

图9-5所示为非零初始条件下的极点位置和相应的时间响应。当二阶系统的极点是两个相等的实根时，系统表现为临界阻尼运动，系统将以最短的时间回到平衡位置而不出现振荡。

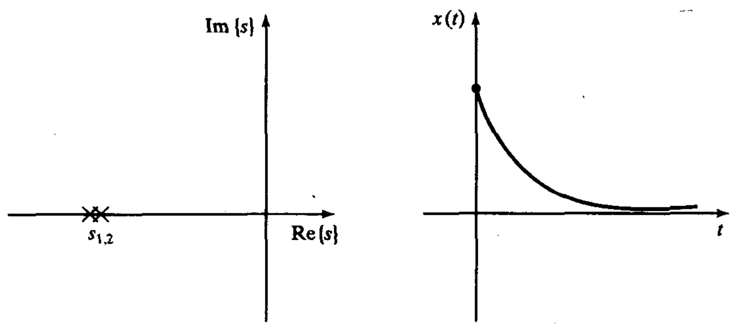


图9-5 临界阻尼系统在初始条件下根的位置和响应

例9.3

求图9-2所示系统的运动。假设各参数值如下：$m=1$、$b=4$、$k=4$，质量块（初始时静止）在位置$x=-1$处被释放。

特征方程为

$$s^2+4s+4=0 \tag{9-29}$$

解得的根为$s_1=s_2=-2$，因此系统的响应为

$$x(t)=(c_1+c_2t)e^{-2t} \tag{9-30}$$

根据已知的初始条件$x(0)=-1$和$\dot{x}(0)=0$，计算c_1和c_2。为了在$t=0$时满足上述条件，必须有

$$c_1=-1$$

和

$$-2c_1+c_2=0 \tag{9-31}$$

解得$c_1=-1$，$c_2=-2$。因此当$t\geqslant 0$时，系统的运动为

$$x(t)=(-1-2t)e^{-2t} \tag{9-32}$$

■ 270

从例9.1到例9.3的系统都是稳定的。像图9-2这样的受力系统就是这种情况。这种机械系

统始终具有如下的特性：

$$
\begin{aligned} m&>0 \\ b&>0 \\ k&>0 \end{aligned} \tag{9-33}
$$

在下一节中，可看到控制系统的作用实际上就是改变这些系数中的一个或多个值。为此必须考虑设计的系统是否稳定。

9.4 二阶系统的控制

如果二阶机械系统的响应并不满足我们的要求，例如求得的系统是欠阻尼系统或振荡系统，而我们需要临界阻尼系统；或者系统的弹性完全消失(k=0)，因此当受到扰动时，系统永远也不能返回到x=0的位置。那么通过使用传感器、驱动器和控制系统，便可以按照我们的要求改变系统的特性。

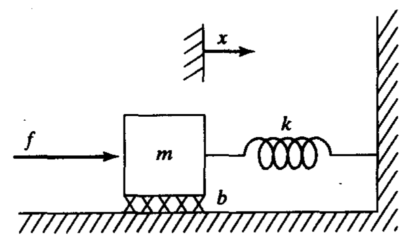


图9-6 带有驱动器的有阻尼质量-弹簧系统

图9-6所示为一个带有驱动器的有阻尼质量-弹簧系统，驱动器给质量块施加一个力f。由受力图得出如下运动方程

$$
m\ddot{x}+b\dot{x}+kx=f \tag{9-34}
$$

假如可以通过传感器测定质量块的位置和速度。现在我们给出一种**控制律**，它可以计算出驱动器应当施加给质量块的力，这个力是传感器反馈的函数：

$$
f=-k_p x-k_v\dot{x} \tag{9-35}
$$

图9-7是一个闭环系统的框图，图中虚线左边的部分为控制系统（通常通过计算机实现），虚线右边的部分为受力系统。图中没有表示出控制计算机同驱动器输出指令以及传感器输入信息之间的接口。

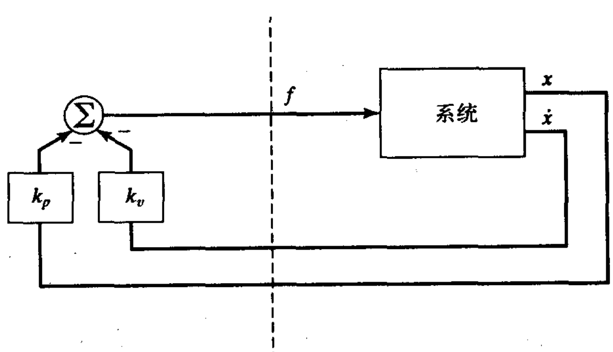


图9-7 闭环控制系统，控制计算机（虚线左边部分）读取传感器输入信号并向驱动器输出指令

我们所提出的控制系统是一个**位置校正**系统——这种系统只是试图保持质量块在一个固定的位置，而不考虑质量块受到的干扰力。在下一节，我们将要构造一个**轨迹跟踪**控制系统，使质量块能跟随期望的位置轨迹运动。

联立开环动力学方程式（9-34）和控制律式（9-35），就可以得到闭环系统动力学方程如下

$$m\ddot{x}+b\dot{x}+kx=-k_p x-k_v\dot{x} \tag{9-36}$$

或

$$m\ddot{x}+(b+k_v)\dot{x}+(k+k_p)x=0 \tag{9-37}$$

或

$$m\ddot{x}+b'\dot{x}+k'x=0 \tag{9-38}$$

式中 $b'=b+k_v, k'=k+k_p$。从式（9-37）和式（9-38）可以清楚看出，通过设定**控制增益**k_v 和 k_p 可以使闭环系统呈现任何期望的二阶系统特性。经常通过选择增益获得临界阻尼（即 $b'=2\sqrt{mk'}$）和某种直接由 k' 给出的期望**闭环刚度**。

k_v 和k_p 可正可负，这是由原系统的参数决定的。而当 b' 或 k' 为负数时，控制系统将是不稳定的。由二阶微分方程的解（式（9-6）、式（9-14）或者式（9-26）的形式）可以明显看出这种不稳定性。同样可以直接看出，如果 b' 或 k' 为负数时，伺服误差趋向增大而不是减小。

例9.4

如图9-6中所示的系统，各参数分别为m=1, b=1, k=1, 求使闭环刚度为16.0时的临界阻尼系统的位置校正控制律的增益k_v 和k_p 。 271~272

如果 k'=16.0，那么为了达到临界阻尼，则需要 $b'=2\sqrt{mk'}=8.0$。现在k=1，b=1，于是有

$$\begin{aligned} k_p&=15.0\\ k_v&=7.0 \end{aligned} \tag{9-39}$$

■

9.5 控制律的分解

为了设计更为复杂的系统的控制律，我们对图9-6中的控制系统结构稍作一些变化。把控制器分为**基于模型的控制部分**和**伺服控制部分**。这样系统的参数（即m，b，k）仅出现在基于模型的控制部分，而与伺服控制部分是完全独立的。在本章中，这个区别显得并不重要，但对于第10章中的非线性系统来说这种区别就显得非常重要了。本书中主要采用这种**控制律分解**方法。

系统开环运动方程为

$$m\ddot{x}+b\dot{x}+kx=f \tag{9-40}$$

将这个系统的控制器分为两个部分。此时，控制律中基于模型的控制部分应用给定的参数m，b和k，可以将系统简化成一个单位质量，例9.5说明了这个问题。控制律的第二部分利用反馈来改变系统的特性。控制律中基于模型的控制部分将系统简化成一个单位质量，因此伺服控制部分的设计就非常简单了——仅需选择增益，控制一个仅由单位质量构成的系统（即没有摩擦和刚度）。

在控制律中，基于模型的控制部分的表达式为

$$f=\alpha f'+\beta \tag{9-41}$$

式中α和β是函数或常数，如果将 f' 作为新的系统输入，那么可选择α和β使系统简化为单位

质量。对于这种控制律结构，系统方程（联立式（9-40）和式（9-41））为

$$m\ddot{x}+b\dot{x}+kx=\alpha f'+\beta \tag{9-42}$$

显然，为了在输入 f' 时将系统简化为单位质量，这个系统中的α和β选择如下

$$\begin{aligned}\alpha&=m\\ \beta&=b\dot{x}+kx\end{aligned} \tag{9-43}$$

将这些假设条件代入式（9-42），得到系统方程

273

$$\ddot{x}=f' \tag{9-44}$$

这是单位质量的运动方程。式（9-44）可作为被控系统的开环动力学方程。同前面的方法一样，设计一个控制律去计算 f'：

$$f'=-k_v\dot{x}-k_px \tag{9-45}$$

将这个控制律与式（9-44）联立得

$$\ddot{x}+k_v\dot{x}+k_px=0 \tag{9-46}$$

在这种方法中，控制增益的设定非常简单，而且与系统参数独立，即

$$k_v=2\sqrt{k_p} \tag{9-47}$$

这时系统处于临界阻尼状态。图9-8所示为控制图9-6所示系统的分解控制器框图。

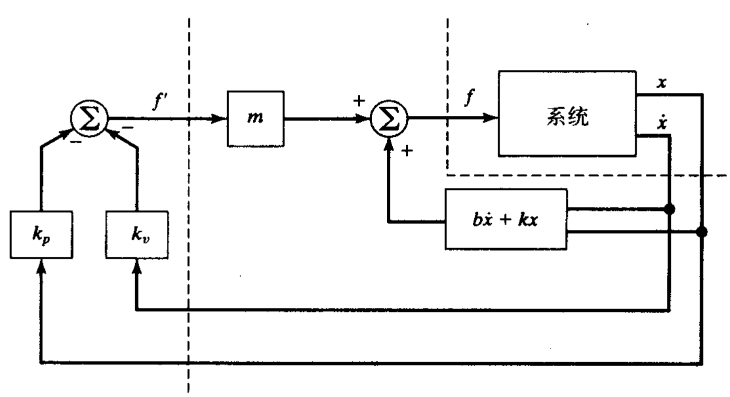


图9-8 采用控制律分解方法的闭环控制系统

例9.5

图9-6所示的系统参数分别为m=1，b=1，k=1。按照位置校正控制律，求在闭环刚度为16.0、系统为临界阻尼状态时的α、β以及增益k_p 和k_y。

选择

$$\begin{aligned}\alpha&=1\\ \beta&=\dot{x}+x\end{aligned} \tag{9-48}$$

假定输入 f' 时系统简化为一单位质量。设定k_p 为期望闭环刚度的增益，并设定系统为临界阻尼，

274 尼，$k_v=2\sqrt{k_p}$ 。

可得

$$k_p = 16.0$$
$$k_v = 8.0 \qquad (9\text{-}49)$$

9.6 轨迹跟踪控制

我们不仅要求质量块能够保持在期望位置，而且希望扩展控制器功能，使质量块能够跟踪一条轨迹。已知轨迹$x_d(t)$是时间的函数，求质量块的期望位置。假设轨迹是光滑的（即一阶导数存在），并且轨迹发生器在任一时间t始终给出一组x_d、$\dot{x}_d$和$\ddot{x}_d$。定义伺服误差$e=x_d-x$为期望轨迹与实际轨迹之差。由伺服控制律得出的轨迹如下

$$f' = \ddot{x}_d + k_v\dot{e} + k_p e \qquad (9\text{-}50)$$

一个适当的选择是将式（9-50）与单位质量运动方程式（9-44）联立，得到

$$\ddot{x} = \ddot{x}_d + k_v\dot{e} + k_p e \qquad (9\text{-}51)$$

或者

$$\ddot{e} + k_v\dot{e} + k_p e = 0 \qquad (9\text{-}52)$$

可由这个二阶微分方程选择系数，由此可以设计任何期望的响应（通常选择临界阻尼）。有时称这种方程为**误差空间**方程，因为它描述了相对于期望轨迹的误差估计。图9-9为轨迹跟踪控制器的框图。

如果模型（即关于m、b和k的值）是正确的，并且没有噪声和初始误差，质量块将准确跟随期望轨迹运动。如果存在初始误差，这个误差将受到抑制（见式（9-52）），而后这个系统将准确跟踪期望轨迹。

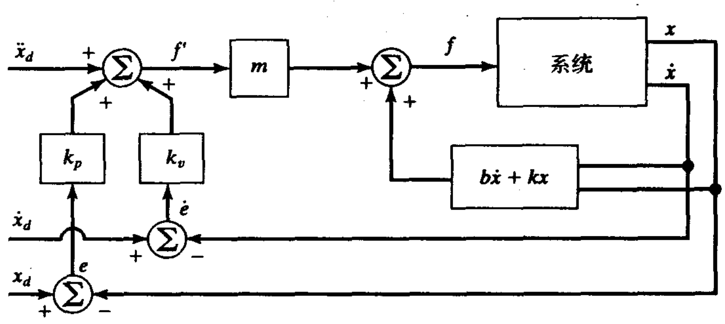


图9-9 图9-6所示系统的轨迹跟踪控制器

275

9.7 抗干扰

控制系统的一个作用就是提供**抗干扰**能力，即存在外部干扰或者**噪声**的时候，仍能保持良好的性能（即减小误差）。图9-10所示为具有附加输入——干扰力f_{dist}的轨迹跟踪控制器。通过对闭环系统进行分析得出误差方程为

$$\ddot{e} + k_v\dot{e} + k_p e = f_{dist} \qquad (9\text{-}53)$$

式（9-53）是一个由力函数驱动的微分方程。如果已知f_{dist}是**有界的**——即存在常数a使得

$$\max_t f_{dist}(t) < a \tag{9-54}$$

这样微分方程的解$e(t)$也是有界的。这个结果是由一个称为**有界输入-有界输出**即BIBO稳态线性系统的稳定性特性得出的[3, 4]。这个基本结论说明，在大范围的干扰下，至少能够保持系统是稳定的。

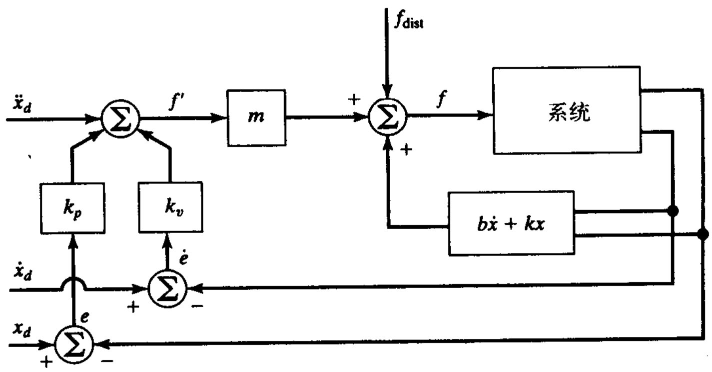


图9-10 具有干扰作用的轨迹跟踪控制系统

稳态误差

以一种最简单的干扰为例——即f_{dist}为常数的情况。这种情况下，通过对静态时系统的分析（即所有系统变量的导数都为0）进行**稳态分析**。设式（9-53）中的导数为0，得稳态方程为

$$k_p e = f_{dist} \tag{9-55}$$

或者

$$e = f_{dist} / k_p \tag{9-56}$$

276 由式（9-56）可求出**稳态误差**e的值。显然，位置增益k_p越大，稳态误差就越小。

附加积分项

为消除稳态误差，有时采用一种修正的控制律。这种修正是在控制律中附加一个积分项，即

$$f' = \ddot{x}_d + k_v\ddot{e} + k_p e + k_i\int e dt \tag{9-57}$$

则误差方程变为

$$\ddot{e} + k_v\dot{e} + k_p e + k_i\int e dt = f_{dist} \tag{9-58}$$

增加这一项可使系统在恒定干扰情况下，不出现稳态误差。如果$t<0$时$e(t)=0$，那么当$t>0$时式（9-58）可写成

$$\ddot{e} + k_v\ddot{e} + k_p\dot{e} + k_i e = \dot{f}_{dist} \tag{9-59}$$

稳态（对于恒定干扰）时，上式变为

$$k_i e = 0 \tag{9-60}$$

因此

$$e=0 \tag{9-61}$$

对于这种控制律，系统变成了一个三阶系统，求解相应的三阶微分方程，可以求出初始条件下系统的响应。通常k_i非常小，使得这个三阶系统没有积分项而“近似于”一个二阶系统（即仅需进行主极点分析）。控制律式（9-57）被称为**PID控制律**，即“比例、积分、微分”控制律[4]。为简单起见，本书中给出的控制方程一般不含有积分项。

9.8 连续时间控制与离散时间控制

在前面讨论的控制系统中，都假设控制计算机完成控制律计算的时间为0（即无限快）。所以驱动力f的值是时间的连续函数。当然在实际情况中，计算都需要一定的时间，因此输出的力指令是一个离散的“阶梯”函数 。本书中我们将认为计算机的计算速度极快。如果f的更新计算速率比受控系统的固有频率快很多，那么这个近似就是合适的。而在**离散时间控制**或**数字控制**领域，进行系统分析时，并不进行这种近似，而是考虑控制系统的**伺服速度**[3]。

通常假设计算速度足够快以至于时间连续性假设是有效的。由此产生了一个问题：计算到底需要多么快？若使选择的伺服（或采样）速度足够快则需要考虑以下几点： 277

跟踪参考输入：期望输入或参考输入的频率范围给定了采样速率的绝对下限。采样频率至少为参考输入带宽的两倍。但这通常并不是限制因素。

抗干扰：对于抗干扰问题，时间连续系统给定了系统性能的上限。如果采样周期比干扰作用（假设为随机干扰的统计形式）的持续时间长，那么这些干扰将不会被抑制。一种有效的方法是使采样周期小于噪声持续时间的十分之一[3]。

抗混叠：只要在数控系统中使用模拟传感器，就会出现混叠现象，除非传感器的输出严格限制在带宽范围内。大多数情况下，传感器没有输出带宽的限制，因此应选择采样频率使混叠信号的能量较小。

结构共振：在操作臂的动力学特性中未包括弯曲变形。实际上所有机构的刚度都是有限的，因此会出现多种形式的振动。如果必须抑制这些振动（经常需要），那么必须使采样频率至少为固有共振频率的两倍。本章后面将再次讨论共振问题。

9.9 单关节的建模和控制

本节将要为单一旋转关节操作臂建立一个简单模型。通过几项假设可把这个系统看作为二阶线性系统。对于更完备的驱动关节模型，见参考文献[5]。

许多工业机器人常用的驱动器是直流（DC）力矩电机（如图8-18所示）。电机中不转动的部分（**定子**）由机座、轴承、永久磁铁或电磁铁组成。定子中的磁极产生一个穿过电机转动部件（**转子**）的磁场。转子由电机轴和线圈绕组组成，电流通过线圈绕组产生电机转动的能量。电流经与换向器接触的电刷流入线圈绕组。换向器与变化的线圈绕组（也称为**电枢**）以某种方式相连接便产生指定方向的转矩。当电流通过线圈绕组时电机会产生转矩的物理现象[6]可以表示为

$$F=qV\times B \tag{9-62}$$

这里电荷q以速度V通过磁场强度为B的区域时将产生一个力F。电荷为通过线圈绕组的电子，

磁场由定子磁极产生。一般来说，电机产生转矩的能力用**电机转矩常数**表示，电枢电流与输出转矩的关系可表示为

278 $$\tau_m = k_m i_a \tag{9-63}$$

当电机转动时，则成为一个发电机，在电枢上产生一个电压。电机的另一个常数，**反电势常数**⊖，表示给定转速时产生的电压

$$v = k_e \dot{\theta}_m \tag{9-64}$$

一般来讲，换向器实际上是一个开关，它使电流通过变化的线圈绕组产生转矩，并产生一定的**转矩波动**。尽管有时这个影响很重要，但通常这种影响可忽略不计（在任何情况下，建立这个模型都是相当困难的，即使建立了模型，误差补偿也是相当困难的）。

电机电枢感抗

图9-11所示为电枢电路。主要的构成部分是电源电压v_a、电枢绕组的感抗l_a、电枢绕组的电阻r_a以及产生的反电势v。这个电路由如下一阶微分方程描述:

$$l_a \dot{i}_a + r_a i_a = v_a - k_e \dot{\theta}_m \tag{9-65}$$

一般用电机驱动器控制电机的转矩（而不是速度）。驱动电路通过检测电枢电流不断调节电源电压v_a以使通过电枢的电流为期望电流i_a。这个电路称为**电流放大器**式电机驱动器[7]。在电流驱动系统中，由电机感抗l_a和电源电压的上限v_a控制电枢电流变化的速率。实际上相当于在工作电流和输出转矩之间存在一个**低通滤波器**。

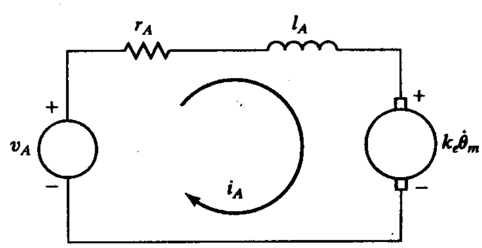


图9-11 直流力矩电机的电枢电路

为简化起见，首先假设电机的感抗可以忽略。当闭环控制系统的固有频率远低于由于感抗引起的电流驱动器中隐含的低通滤波器的截止频率时，这个假设便是合理的。这个假设和转矩波动假设一样都可忽略不计，这表明电机转矩可以直接控
279 制。虽然存在某个比例因子（例如k_m），但仍可以将驱动器视为可以直接控制的纯力矩源。

有效惯量

图9-12所示为通过齿轮减速器与惯性负载相连的直流力矩电机转子的力学模型。式(9-63)表示作用于转子的扭矩τ_m是电枢电流i_a的函数。传动比（η）可提高驱动负载的力矩、降低负载的转速，由下式表示

$$\begin{aligned}\tau &= \eta \tau_m \\ \dot{\theta} &= (1/\eta)\dot{\theta}_m\end{aligned} \tag{9-66}$$

式中$\eta>1$。按照转子力矩写出系统的力矩平衡方程如下

$$\tau_m = I_m \ddot{\theta}_m + b_m \dot{\theta}_m + (1/\eta)(I\ddot{\theta} + b\dot{\theta}) \tag{9-67}$$

⊖ “emf”代表电动势。

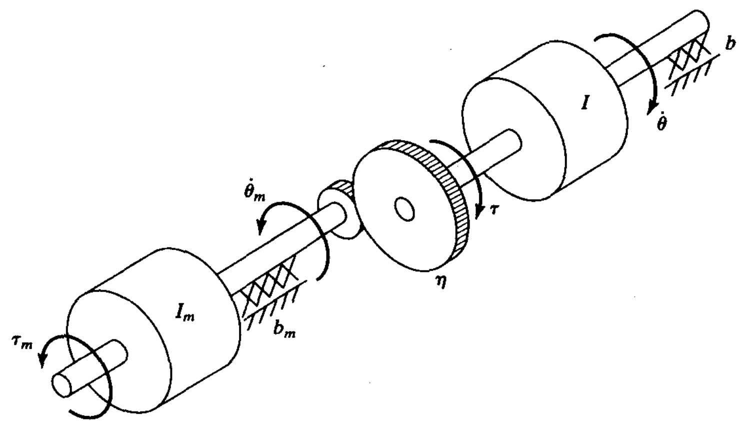


图9-12 通过齿轮减速器与惯性负载相连的直流力矩电机的力学模型

式中I_m和I分别为电机转子惯量和负载惯量，b_m和b分别为电机转子轴承和负载轴承的粘滞摩擦系数。由式（9-66)，将式（9-67）按照电机变量改写为

$$\tau_m=\left(I_m+\frac{I}{\eta^2}\right)\ddot{\theta}_m+\left(b_m+\frac{b}{\eta^2}\right)\dot{\theta}_m \tag{9-68}$$

或根据负载变量改写为

$$\tau=(I+\eta^2 I_m)\ddot{\theta}+(b+\eta^2 b_m)\dot{\theta} \tag{9-69}$$

$I+\eta^2 I_m$有时被称作减速器输出端（连杆侧）的**有效惯量**。同样，$b+\eta^2 b_m$被称作**有效阻尼**。注意，在大传动比（即$\eta>>1$）的情况下，电机转子惯量是有效组合惯量中的主要部分。正是这个原因我们才能够假设有效惯量是一个常数。由第6章可知，机构关节的惯量I实际上是随着机构位形和负载变化的。然而在大传动比的机器人中，这种变化的比例小于**直接驱动**操作臂（即$\eta=1$）。为确保机器人连杆的运动永远不为欠阻尼，I值应为取值范围内的最大值；即I_{max}。这样可保证系统在任何情况下均为临界阻尼或者过阻尼。在第10章中我们将直接研究变化惯量并且不做上述假设。 280

例9.6

如果连杆惯量I在2～6Kg-m²之间变化，转子惯量I_m=0.01，传动比η=30，求有效惯量的最大值和最小值。

有效惯量的最小值为

$$I_{min}+\eta^2 I_m=2.0+(900)(0.01)=11.0 \tag{9-70}$$

最大值为

$$I_{max}+\eta^2 I_m=6.0+(900)(0.01)=15.0 \tag{9-71}$$

因此可以看出，相对于总有效惯量的比例，通过减速器使得惯量的变化减小了。

未建模柔性

在建模过程中的另一个主要假设是减速器、轴、轴承以及被驱动的连杆都是不可变形的。

实际上这些元件的刚度都是有限的，因此在系统建模时，它们的柔性将增加系统的阶次。关于忽略柔性作用影响的理由是，如果系统刚度极大，这些**未建模共振**的固有频率将非常高，与已建模的二阶主极点的影响相比可以忽略不计⊖。为了进行控制系统的分析和设计，“未建模”实际上是为了忽略这些影响而可以采用式（9-69）这样一个较简单的动力学模型。

因为在建模时未考虑系统的结构柔性，因此必须注意不能激发起这些共振模态。经验方法[8]为：如果最低的结构共振频率为ω_{res}，那么必须按照下式限定闭环固有频率

$$\omega_n \leqslant \frac{1}{2}\omega_{res} \tag{9-72}$$

这为选择控制器增益提供了依据。我们发现提高增益会加速系统响应、减小稳态误差，同时我们也发现非建模结构共振限制了系统增益。典型工业机器人的结构共振范围为5Hz 到25 Hz [8]。
281 最新的设计采用直接驱动方式可以避免由减速器和传动系统产生的柔性，可使机器人的最低结构共振频率提高到70Hz[9]。

例9.7

图9-7所示系统的各参数值为：m=1，b =1和k =1。此外，已知系统未建模的最低共振频率为8rad/s。求α，β以及为使系统达到临界阻尼的位置控制律的增益k_p 和k_v。且未建模模态未被激励，系统的闭环刚度尽量高。

取

$$\begin{aligned}\alpha &= 1\\ \beta &= \dot{x} + x\end{aligned} \tag{9-73}$$

在虚拟输入 f' 作用下，系统可简化为一单位质量。利用经验方法式（9-72），取闭环固有频率ω_n =4rad/s。由式（9-18）和式（9-46）得 $k_p = \omega_n^2$，于是有

$$\begin{aligned}k_p &= 16.0\\ k_v &= 8.0\end{aligned} \tag{9-74}$$

■

估计共振频率

引起共振的原因与第8章中讨论的结构柔性的问题相同。在结构柔性能够识别的情况下，如果能够给出柔性结构件有效质量或有效惯量的描述，那么就可以进行振动的近似分析。由式（9-20）给出的简单质量-弹簧系统可以近似得出系统的固有频率

$$\omega_n = \sqrt{k/m} \tag{9-75}$$

式中k为柔性结构件的刚度，m为振动系统的等效质量。

例9.8

某轴（假设无质量）的刚度为400Nm/rad，驱动一个转动惯量为1Kg · m²的负载。如果在动力学模型中不计轴的刚度，那么这个未建模共振频率是多少？

⊖ 这基本上与我们忽略由于电机感抗产生的极点一样。如果包括这些极点，那么系统的阶次将会提高。

应用式（9-75），得

$$\omega_{res}=\sqrt{400/1}=20\text{rad/s}=20/(2\pi)\text{Hz}\cong 3.2\text{Hz} \tag{9-76}$$

为粗略估计梁和轴的最低共振频率，参考文献[10]建议采用**集中质量模型**。估计梁和轴的末端刚度公式是已知的；集中质量模型提供了估算共振频率所需的有效质量或有效惯量。图9-13所示为参考文献[10]中的能量分析结果，这个分析建议用一个位于梁末端的质量为0.23m的质点代替质量为m的梁，同样，要由轴末端的集中惯量0.33I代替分布惯量I。 282

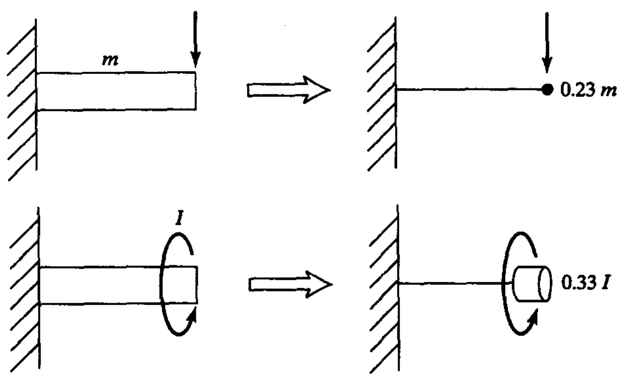


图9-13 用于估计横向共振和扭转共振的梁的集中质量模型

例9.9

一个质量为4.347 Kg连杆，末端横向刚度为3600Nt/m。假设驱动系统是完全刚性的，由于连杆柔性引起的共振将会限制控制增益，求ω_{res}。

4.347 Kg的质量在连杆上均匀分布，应用图9-13中的方法，有效质量为$(0.23)(4.347)\cong 1.0\text{Kg}$，因此振动频率为

$$\omega_{res}=\sqrt{3600/1.0}=60\text{rad/s}=60/(2\pi)\text{Hz}\cong 9.6\text{Hz} \tag{9-77}$$

如果希望这个系统的闭环带宽高于式（9-75）中的闭环带宽，那么必须在用于控制律综合法的系统模型中应包括结构柔性。这种情况下系统的模态是高阶的，相应的控制方法将变得相当复杂。这种控制方法超出了当前的工程实际发展水平，正处于研究阶段[11, 12]。

单关节控制

概括来说，我们建立了下列三个主要假设：

1. 电机的感抗l_a可以忽略。
2. 考虑大传动比的情况，将有效惯量视为一个常数，即$I_{max}+\eta^2 I_m$。
3. 结构柔性可以忽略，最低结构共振频率ω_{res}用于设定伺服增益的情况除外。

应用这些假设，可以用下式给出的分解运动对一个单关节操作臂进行控制 283

$$\alpha = I_{\max} + \eta^2 I_m \tag{9-78}$$

$$\beta = (b + \eta^2 b_m)\dot{\theta}$$
$$\tau' = \ddot{\theta}_d + k_v \dot{e} + k_p e \tag{9-79}$$

系统的闭环动力学方程为

$$\ddot{e} + k_v \dot{e} + k_p e = \tau_{\text{dist}} \tag{9-80}$$

式中的增益取

$$k_p = \omega_n^2 = \frac{1}{4}\omega_{\text{res}}^2$$
$$k_v = 2\sqrt{k_p} = \omega_{\text{res}} \tag{9-81}$$

9.10 工业机器人控制器的结构

本节中，我们简单了解一下Unimation PUMA 560工业机器人的控制系统结构。如图9-14所示，硬件结构分为两个层次，一台DEC LSI-11计算机作为上层“主控”计算机输出指令到6个Rockwell 6503微处理器⊖。与本章讨论的控制方案不同，每一个微处理器采用PID控制律控制一个独立关节。PUMA 560机器人的每一个关节安装有一个光学增量编码器。这种编码器与一个上/下计数器接口，微处理器可以读取关节的当前位置。PUMA 560机器人上没有转速计，而是通过对关节位置的伺服周期序列差分获得关节速度。为了控制直流力矩电机的力矩，微处理器与一个数模转换器（DAC）接口，控制进入电流驱动器的电机电流。按照需要通过调节电枢两端的电压控制模拟电路中的电机电流，以保持期望的电枢电流。图9-15为这个系统的框图。

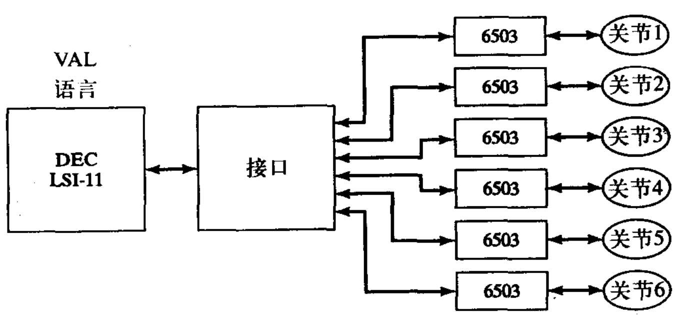


图9-14 PUMA 560机器人控制系统的计算机分级体系

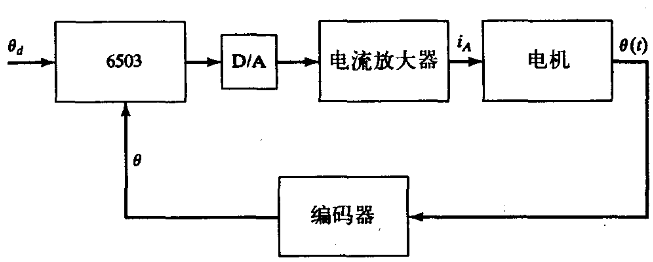


图9-15 PUMA 560机器人关节控制系统的功能框图

⊖ 这些简单的8位计算机是早期的技术。现在机器人的控制器普遍采用32位微处理器。

LSI-11计算机每28ms发送一个新的位置指令（**定位点**）到关节微处理器。关节微处理器的运行周期为0.875ms。在这个周期内，微处理器进行期望位置定位点的差补运算，计算伺服误差，计算PID控制律以及向电机发送一个新的力矩值。

LSI-11计算机执行整个控制系统的所有“高级”操作。首先，计算机需要对VAL（Unimation机器人编程语言）程序指令逐句进行编译。在进行运动指令的编译时，LSI-11计算机执行必要的逆运动学计算，进行期望轨迹规划，并且每28ms为关节控制器生成一组路径点轨迹。

LSI-11计算机还可与标准外设如终端设备和软盘驱动器接口。另外，计算机还有与**悬挂式示教盒**的接口。悬挂式示教盒是一个手持的按钮盒，操作者可以用示教盒以各种运动模式控制机器人运动。例如，PUMA 560系统允许用户通过示教盒按增量方式让机器人在关节坐标系或者笛卡儿坐标系中运动。在这种模式下，可以在机器人“不工作”时，通过示教盒上的按钮进行轨迹计算，并将轨迹指令向下发送到关节控制微处理器。

参考文献

[1] W. Boyce and R. DiPrima, *Elementary Differential Equations*, 3rd edition, John Wiley and Sons, New York, 1977.

[2] E. Purcell, *Calculus with Analytic Geometry*, Meredith Corporation, New York, 1972.

[3] G. Franklin and J.D. Powell, *Digital Control of Dynamic Systems*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1980.

[4] G. Franklin, J.D. Powell, and A. Emami-Naeini, *Feedback Control of Dynamic Systems*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1986.

[5] J. Luh, "Conventional Controller Design for Industrial Robots—a Tutorial," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, Vol. SMC-13, No. 3, June 1983. 284~285

[6] D. Halliday and R. Resnik, *Fundamentals of Physics*, Wiley, New York 1970.

[7] Y. Koren and A. Ulsoy, "Control of DC Servo-Motor Driven Robots," *Proceedings of Robots 6 Conference*, SME, Detroit, March 1982.

[8] R.P. Paul, *Robot Manipulators*, MIT Press, Cambridge, MA, 1981.

[9] H. Asada and K. Youcef-Toumi, *Direct-Drive Robots—Theory and Practice*, MIT Press, Cambridge, MA, 1987.

[10] J. Shigley, *Mechanical Engineering Design*, 3rd edition, McGraw-Hill, New York, 1977.

[11] W. Book, "Recursive Lagrangian Dynamics of Flexible Manipulator Arms," *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 3, No. 3, 1984.

[12] R. Cannon and E. Schmitz, "Initial Experiments on the End-Point Control of a Flexible One Link Robot," *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 3, No. 3, 1984.

[13] R.J. Nyzen, "*Analysis and Control of an Eight-Degree-of-Freedom Manipulator*," Ohio University Master's Thesis, Mechanical Engineering, Dr. Robert L. Williams II, Advisor, August 1999.

[14] R.L. Williams II, "*Local Performance Optimization for a Class of Redundant Eight-Degree-of-Freedom Manipulators*," **NASA Technical Paper 3417**, NASA Langley Research Center, Hampton, VA, March 1994.

习题

9.1 [20]一个二阶微分方程有复根

$$s_1 = \lambda + \mu i$$
$$s_2 = \lambda - \mu i$$

证明它的通解为

$$x(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t}$$

可写成

$$x(t) = c_1 e^{\lambda t}\cos(\mu t) + c_2 e^{\lambda t}\sin(\mu t)$$

9.2 [13]计算图9-2所示系统的运动，如果参数值分别为：m=2，b=6和k=4，并且质量块（初始时静止）从x=1位置释放。

9.3 [13]计算图9-2所示系统的运动，如果参数值分别为：m=1，b=2和k=1，并且质量块（初始时静止）从x=4位置释放。

9.4 [13]计算图9-2所示系统的运动，如果参数值分别为：m=1，b=4和k=5，并且质量块（初始时静止）从x=2位置释放。

9.5 [15]计算图9-2所示系统的运动，如果参数值分别为：m=1，b=7和k=10，并且质量块（初始时静止）从x=2位置释放。

9.6 [15]用式（6.60）的元素(1,1)，计算这个机器人在位形变化时，关节1的等效惯量的变化（以最大值的百分比表示）。采用以下数值

$$l_1 = l_2 = 0.5\text{m}$$
$$m_1 = 4.0\text{Kg}$$
286
$$m_2 = 2.0\text{Kg}$$

认为机器人是直接驱动的，并且转子惯量可被忽略。

9.7 [17]重新计算习题9.6，其中机器人带有减速器（取η=20），并且转子惯量为I_m=0.01Kg · m²。

9.8 [18]考虑图9-6中所示的系统，如果参数分别为：m=1，b=4和k=5，并且系统的未建模共振频率为ω_{res}=6.0rad/s。确定在刚度达到允许的最大值时系统临界阻尼的增益k_v和k_p。

9.9 [25]图9-12所示的系统，负载惯量I在4~5Kg · m²之间，转子惯量为I_m=0.01Kg · m²，传动比为η=10。系统的未建模共振频率为8.0，12.0，20.0rad/s。设计分解运动控制器的α和β，求k_v和k_p的值，要求系统不出现欠阻尼并且不存在共振，刚度尽可能大。

9.10 [18]某直接驱动机器人的设计者，怀疑由连杆本身的柔性引起的共振是产生最低阶未建模共振的原因。如果将连杆近似看成正方形横截面的梁，尺寸为5 × 5 × 50cm，壁厚为1cm，总质量为5Kg，估算ω_{res}。

9.11 [15] 一直接驱动机器人的连杆，由刚度为1000Nt-m/rad的轴驱动，连杆惯量为1Kg · m²，轴的质量忽略不计，求ω_{res}。

9.12 [18] 轴的刚度为500Nt-m/rad，驱动一刚性齿轮副，传动比η=8。减速器的输出端驱动一惯量为1Kg · m²的刚性连杆。求轴的柔性产生的ω_{res}是多少？

9.13 [25] 轴的刚度为500Nt-m/rad，驱动一刚性齿轮副，传动比η=8。轴的惯量为0.1Kg · m²。减速器的输出端驱动一惯量为1Kg · m²的刚性连杆。求轴的柔性产生的ω_{res}是多少？

9.14 [28] 在图9-12所示的系统中，负载惯量I在4~5Kg · m²之间，转子惯量为I_m=0.01Kg · m²，传动比为η=10。连杆末端刚度为2400Nt-m/rad，因此系统具有未建模共振。设计分解运动控

制器的α和β，求k_v和k_p的值，要求系统不会出现欠阻尼，并且不存在共振，刚度尽可能大。

9.15 [25] 一长度为30cm、直径0.2cm的钢轴驱动传动比η=8的减速器，刚性齿轮的输出端驱动一个长度为30cm、直径0.3cm的钢轴，如果负载惯量在1~4Kg · m²之间变化，系统的共振频率范围是多少？

编程习题

对一个三连杆平面操作臂的简单轨迹跟踪控制系统进行仿真。控制系统按照PD（比例+微分）控制律，对一个独立关节进行控制。对关节1到3分别设定伺服增益，使系统的闭环刚度为175.0，110.0和20.0。使系统接近临界阻尼。

采用UPDATE仿真程序对一个离散时间伺服系统进行仿真。伺服频率为100Hz，即以100Hz的频率而不是以数值积分的频率计算控制律。按以下要求对这个控制方案进行测试:

1. 在Θ=(60, －110, 20)时启动操作臂，当定位点瞬时变化到Θ=(60, －50, 20)时，控制操作臂在这个位置停留时间为3.0。这样就给关节2一个60deg的阶跃输入。记录每一个关节的时间误差。
2. 控制操作臂沿着编程习题中的三次样条曲线的轨迹运行。记录每一个关节的时间误差。 287

MATLAB习题

本练习主要是对NASA的八轴AAI ARMII型操作臂（Advanced Research Manipulator II）的肩关节（关节2）进行线性独立关节控制的仿真（见参考文献[14]）。要求熟练掌握线性反馈控制系统，包括原理框图和拉普拉斯变换。采用MATLAB 的图形用户界面Simulink。

图9-16所示为由一个直流伺服电机电枢控制器驱动的ARMII电动肩关节/连杆的线性开环系统的动力学模型。开环输入为参考电压V_{ref}（通过一个放大器提高电枢电压），研究负载轴输出转角ThetaL。这也是一个反馈控制的原理图，图中表示了通过光学编码器读取负载轴转角、为PID控制器提供反馈等原理。表中给出了全部系统参数和变量。

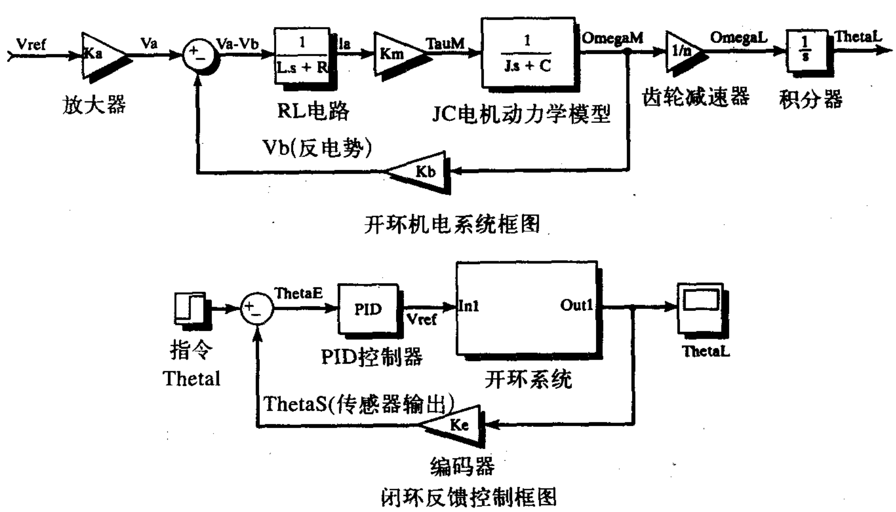


图9-16 由一个直流伺服电机电枢控制器驱动的ARMII电动肩关节/连杆的线性开环系统的动力学模型

如果将负载轴的惯量和阻尼变换到电机轴，有效极惯量和阻尼系数分别为$J=J_M+J_L(t)/n^2$和$C=C_M+C_L/n^2$。由于传动比n很大，因此这些有效值与电机轴的惯量和阻尼系数没有很大差别。为此，由于传动比使我们可以忽略与负载轴惯量$J_L(t)$有关的位形变化，仅给出一个合理的平均值即可。

附表[13]给出了ARMII 的肩关节常量参数。注意，可以直接应用英制单位，因为在控制系统内部它们的影响被抵消了。同样，对于转角可以直接以deg为单位。根据已给出的模型和反馈控制图建立一个Simulink 模型来模拟单关节控制模型，应用表中指定的参数。在正常情况下，为获得“良好的”性能（合适的超调量、上升时间、峰值时间和调节时间），需通过反复试验确定PID增益。对于0到60deg的阶跃输入，对肩关节的运动进行仿真。绘制负载转角值-时间关系
288 的仿真曲线以及负载轴角速度-时间关系的仿真曲线。另外，绘制一个控制效果图——即电枢电压V_a与时间的关系曲线（在同一个图中，给出反电势V_b）。

表9-1 ARMII肩关节常量参数

$V_a(t)$	电枢电压	$\tau_M(t)$	电机输出力矩	$\tau_L(t)$	负载力矩
L=0.0006H	电枢电感	$\theta_M(t)$	电机轴转角	$\theta_L(t)$	负载轴转角
R=1.40Ω	电枢阻抗	$\omega_M(t)$	电机轴角速度	$\omega_L(t)$	负载轴角速度
$i_a(t)$	电枢电流	J_M=0.00844 lb_f-in-s^2	电机的总极惯量	$J_L(t)$=1 lb_f - in - s^2	负载的总极惯量
$V_b(t)$	反电势	C_M=0.00013 lb_f-in/deg/s	电机轴粘性阻尼系数	C_L=0.5 lb_f in/deg/s	负载轴粘性阻尼系数
K_a=12	放大器增益	n=200	传动比	g=0 in/s^2	重力（首先忽略重力）
K_b=0.00867 V/deg/s	反电势常数	K_M=4.375 lb_f-in/A	扭矩常数	K_e=1	编码器转换函数

现在，改变一些参数—Simulink很容易实现参数改变:

1) 进行控制器设计时阶跃输入不成立，因此尝试采用下述斜坡式阶跃输入代替：斜坡坡度为1.5s内从0deg到60deg，然后一直保持在60deg，大于1.5s。重新设计PID增益并重新仿真。
2) 研究电感L在系统中是否重要（电气系统比机械系统上升快得多——这个效应可以由时间常数表示）？
3) 我们没有估计好负载惯量和阻尼（J_L和C_L）。利用你以前得到的最好的PID增益，在对系统不产生影响的情况下，研究这些值能够达到多大（等比例增加标准参数）？
4) 现在将重力影响作为电机力矩T_M的干扰。假设机器人运动质量为200 lb，关节2向前移动长度为6.4ft。测试你以前调整好的PID增益，如有必要则需重新设计。肩关节负载角
289 θ_2在零位，且竖直向上。

第10章 操作臂的非线性控制

10.1 概述

在上一章，为了用线性方法对操作臂控制问题进行分析，我们给出了几个近似假设。其中最重要的近似假设是认为每个关节都是独立的，而且每个关节驱动器的惯量被“认为”是恒定的。上一章中的线性控制器在实际工作时，由于这种近似会导致整个工作空间内系统阻尼不一致，以及出现其他意想不到的结果。在本章中，我们将介绍不需要这些假设的更高级的控制技术。

在第9章，我们使用n个独立的二阶微分方程对操作臂进行建模，在这个基础上建立了控制器模型。在本章中，我们将根据第6章中推导的一般操作臂的$n \times 1$非线性矢量运动微分方程模型直接进行控制器设计。

非线性控制理论是一个广泛的领域，因此我们只能讨论几种比较适用于机械操作臂控制的方法。本章中主要讨论一种特殊的方法，这种方法在文献[1]中被首次提出，在文献[2, 3]中被称为**计算力矩法**。本章中还将介绍一种非线性系统稳定性分析的方法，称为**李雅普诺夫**方法[4]。

我们仍以最简单的单自由度有阻尼质量弹簧系统为例，开始进行操作臂非线性控制技术的讨论。 290

10.2 非线性系统和时变系统

在前面的推导中，我们求解的是一个线性常系数微分方程。采用这种数学形式是因为图9-6中的有阻尼质量弹簧系统的模型是一个线性时不变系统。而对于参数随时间变化的系统，即具有非线性特性的系统，方程的求解将更加困难。

如果非线性特性不明显，可以用**局部线性化**导出线性模型，在操作点的邻域内，用它近似代表非线性方程。然而，这种方法并不适于操作臂的控制问题，因为操作臂经常在工作空间内作大范围运动，因此无法找到一个适合于所有工作区域的线性化模型。

另一种方法是让操作点随操作臂的移动而变化，始终在操作臂的期望位置附近进行线性化。这种运动线性化的结果使系统成为一个线性的时变系统。虽然对原系统的准静态线性化在某些分析和设计中是有用的，但是我们并不采用这种方法对控制律进行综合，我们将直接研究非线性运动方程，而不借助线性化方法设计控制器。

如果图9-6中的弹簧不是线性的而是具有某种非线性特性，这时可以把系统看作为准静态系统，并在每个瞬时计算出系统极点的位置。我们会发现，当质量块运动时，这些极点随之在复平面上移动，它是质量块位置的函数。因而，我们无法选择固定的增益使极点保持在期望的位置（例如，临界阻尼状态）。为此，需要寻找更复杂的控制律，其中选择的增益是时变的（实际上是按照质量块位置的函数变化）从而使得系统总是处于临界阻尼状态。实际上可以通过计算k_p，使控制律中的非线性项正好抵消弹簧的非线性效应，从而使系统的总刚度始终

保持不变。这种控制方式称为**线性**控制方法，因为它用非线性控制项去“抵消”被控系统的非线性，使得整个闭环系统是线性的。

运用前述的控制律分解方法，可以实现线性化的功能。在控制律分解方法中，伺服控制律始终保持不变，而基于模型的部分将包含非线性模型。因而，基于模型的控制部分对系统进行了线性化处理。通过下面的例子可以得到具体说明。

例10.1

图10-1所示为一非线性弹簧特性。与普通线性弹簧的关系$f = kx$不同，这个弹簧的特性曲线可由$f = qx^3$描述。如果图9-6中所示系统的弹簧是这种弹簧，试建立一个控制律，使得系统工作在刚度为k_{CL}的临界阻尼状态下。

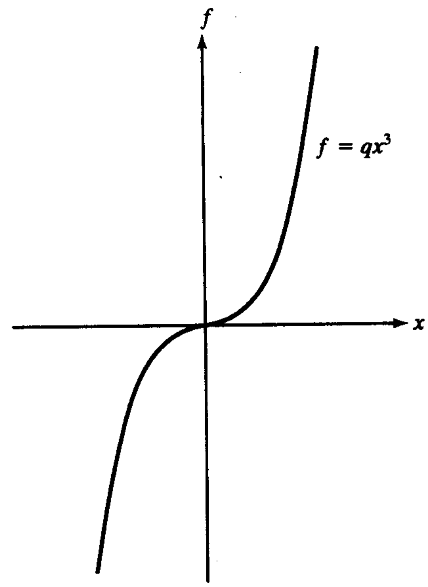


图10-1 非线性弹簧的力-伸长量特性曲线

系统的开环方程为

$$m\ddot{x}+b\dot{x}+qx^3=f \tag{10-1}$$

基于模型的单元为$f=\alpha f'+\beta$，其中

$$\begin{aligned}\alpha&=m\\ \beta&=b\dot{x}+qx^3\end{aligned} \tag{10-2}$$

伺服控制部分同前所述

$$f'=\ddot{x}_d+k_v\dot{e}+k_pe \tag{10-3}$$

式中的增益值可由期望的性能指标计算得出。图10-2为该系统的方框图。这个闭环系统将极点保持在固定位置。

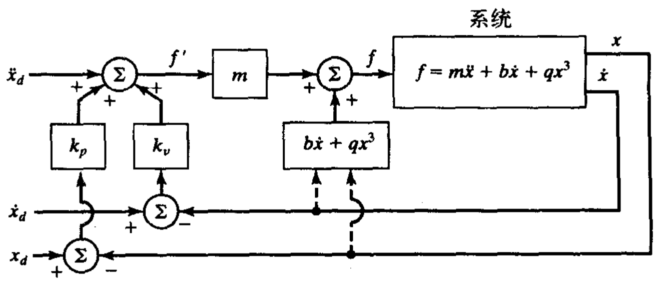


图10-2 用于非线性弹簧系统的非线性控制系统

291～292

例10.2

图10-3所示为非线性摩擦特性。线性摩擦的表达式为 $f = b\dot{x}$ ，而本例中的**库仑摩擦**特性为 $f = b_c\,\mathrm{sgn}(\dot{x})$ 。目前大部分操作臂中，用这种非线性特性描述关节轴承（无论是转动关节还是移动关节）的摩擦比用简单的线性模型更精确。如果图9-6所示系统中的摩擦是这种摩擦，试设计一个控制系统，利用非线性的基于模型的控制部分使系统总是处于临界阻尼状态。

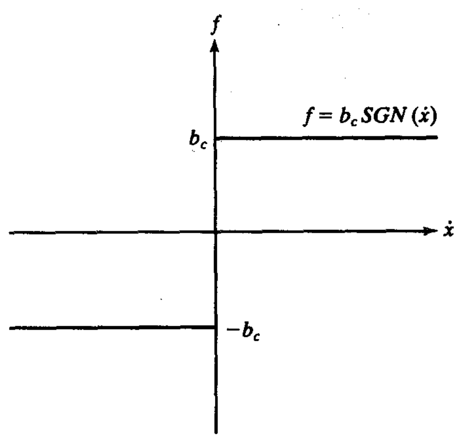


图10-3 库仑摩擦的力-速度特性曲线

系统的开环方程为

$$m\ddot{x} + b_c\,\mathrm{sgn}(\dot{x}) + kx = f \tag{10-4}$$

分解运动控制律为 $f = \alpha f' + \beta$ ，其中

$$\begin{aligned}\alpha &= m\\ \beta &= b_c\,\mathrm{sgn}(\dot{x}) + kx\\ f' &= \ddot{x}_d + k_v\dot{e} + k_p e\end{aligned} \tag{10-5}$$

式中的增益值可由期望的性能指标计算得出。

例10.3

图10-4所示为一单连杆操作臂。有一个转动关节。假定质量集中于连杆末端，则转动惯

293 量为ml^2。关节上作用有库仑摩擦和粘性摩擦，还有重力负载。

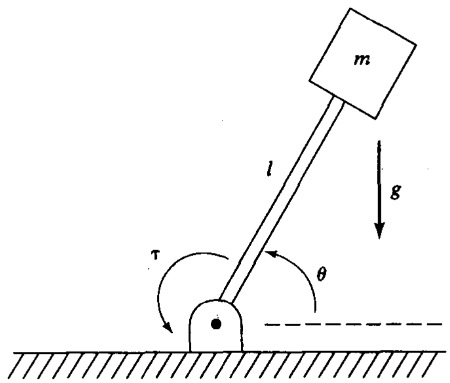


图10-4 一个倒立摆或一个单连杆操作臂

这个操作臂的模型为

$$\tau = ml^2\ddot{\theta} + v\dot{\theta} + c\,sgn(\dot{\theta}) + mlg\cos\theta \tag{10-6}$$

同前，控制系统分解为两部分，线性化的模型控制部分和伺服控制部分。

基于模型的控制部分为 $f = \alpha f' + \beta$，其中

$$\begin{aligned}\alpha &= ml^2 \\ \beta &= v\dot{\theta} + c\,sgn(\dot{\theta}) + mlg\cos\theta\end{aligned} \tag{10-7}$$

伺服控制部分同前

$$f' = \ddot{\theta}_d + k_v\dot{e} + k_p e \tag{10-8}$$

式中的增益值可由期望的性能指标计算得出。

我们可以看到，在某些简单的情况下，设计一个非线性控制器并不困难。前面的简单例子中用到的一般方法同样可用于操作臂的控制问题中：

1. 计算一个非线性的基于模型的控制律，用来“抵消”被控系统的非线性。

2. 将系统简化为线性系统，用对应于单位质量系统的简单线性伺服控制律进行控制。

在某种意义上，线性化控制律给出了被控系统的*逆向模型*。被控系统中的非线性与逆向模型中的非线性相抵消，这样，它与伺服控制律一起构成了一个线性闭环系统。显然，为了抵消系统的非线性作用，必须知道非线性系统的参数和结构。这是这种方法在实际应用中经
294 常遇到的问题。

10.3 多输入多输出控制系统

与本章中前面讨论过的简单例子不同，操作臂的控制是一个多输入多输出（MIMO）问题。也就是说，需用*矢量*表示关节位置、速度和加速度，控制律所计算的是各关节驱动信号*矢量*。把控制律分解成为基于模型的控制部分和伺服控制部分的方法在这里仍然适用，只是以矩阵-矢量的形式出现。控制律的形式如下

$$F = \alpha F' + \beta \tag{10-9}$$

式中，对于自由度为n的系统，F、F'和β为$n\times1$矢量，α为$n\times n$矩阵。注意，矩阵α不一定是对角阵，它的作用是对n个运动方程进行**解耦**。如果适当选择α和β，那么根据输入F'系统，将表现为n个独立的单位质量系统。为此，在多维的情况下，控制律中基于模型的部分被称为**线性化解耦**控制律。而多维系统的伺服控制律为

$$F' = \ddot{X}_d + K_v\dot{E} + K_pE \tag{10-10}$$

式中K_v和K_p都是$n\times n$矩阵，通常选取对角阵，对角线上的元素是常数增益值。E和$\dot{E}$分别为$n\times1$维的位置误差矢量和速度误差矢量。

10.4 操作臂的控制问题

对于操作臂的控制问题，在第6章中曾建立了操作臂的模型和相应的运动方程。我们可以看到，这些方程是很复杂的。刚体动力学方程的形式如下

$$\tau = M(\Theta)\ddot{\Theta} + V(\Theta,\dot{\Theta}) + G(\Theta) \tag{10-11}$$

式中$M(\Theta)$是操作臂的$n\times n$惯量矩阵，$V(\Theta,\dot{\Theta})$是$n\times1$的离心力和哥氏力矢量，$G(\Theta)$是$n\times1$的重力矢量。$M(\Theta)$和$G(\Theta)$中的每一项都是操作臂所有关节位置矢量Θ的复杂函数，$V(\Theta,\dot{\Theta})$中的每一项都是Θ和$\dot{\Theta}$的复杂函数。

另外，我们还可以加进一个摩擦模型（或者其他非刚体效应）。假设这个摩擦模型是关节位置和速度的函数，我们在式（10-11）上加上一项$F(\Theta,\dot{\Theta})$，得到

$$\tau = M(\Theta)\ddot{\Theta} + V(\Theta,\dot{\Theta}) + G(\Theta) + F(\Theta,\dot{\Theta}) \tag{10-12}$$

对于式（10-12）描述的这种复杂系统的控制问题，可以用本章介绍过的控制器分解方法来求解。这时有

$$\tau = \alpha\tau' + \beta \tag{10-13}$$

式中τ是$n\times1$关节力矩矢量。选择

$$\begin{aligned}\alpha &= M(\Theta)\\ \beta &= V(\Theta,\dot{\Theta}) + G(\Theta) + F(\Theta,\dot{\Theta})\end{aligned} \tag{10-14}$$

295

以及伺服控制律

$$\tau' = \ddot{\Theta}_d + K_v\dot{E} + K_pE \tag{10-15}$$

式中

$$E = \Theta_d - \Theta \tag{10-16}$$

求得的控制系统如图10-5所示。

利用式（10-12）至（10-15），很容易得到系统闭环特性的误差方程为

$$\ddot{E} + K_v\dot{E} + K_pE = 0 \tag{10-17}$$

注意，这个矢量方程是解耦的：矩阵K_v和K_p是对角阵，因而式（10-17）可以写成各关节独立的形式

$$\ddot{e}_i + k_{vi}\dot{e} + k_{pi}e = 0 \tag{10-18}$$

式（10-17）描述的理想特性在实际中是无法获得的，在上述诸多因素中最重要的有两点：

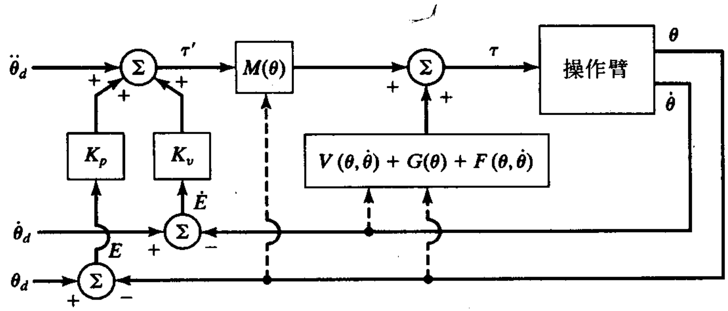


图10-5 基于模型的操作臂控制系统

1. 数字计算机的特性是离散的，而不是式（10-14）和式（10-15）中表示的那种理想的连续时间控制律。

2. 操作臂模型的不精确（必须计算式（10-14））。

在下一节，我们将讨论（至少是部分地讨论）这两个问题。

10.5 实际应用中的问题

前几节中对于解耦和线性化控制的讨论中，实际上作了若干假设，而这些在实际情况中基本不存在。

模型计算耗时

在控制律分解策略的讨论分析中，都隐含假设了整个系统的运行时间是连续的，而且计
296 算控制律所需的时间为零。对于已知的计算量，如果计算机的容量很大，计算速度非常快，那么这个假设是合理的；然而，这种计算机非常昂贵，使得这种方法在经济上是不合算的。对于操作臂控制，在控制律计算中必须计算操作臂的整个动力学方程式（10-14）。这些计算是相当复杂的，因此，如同在第6章中讨论过的，如何建立一个快速的算法来有效地进行这些计算，得到了研究者们很大的关注。随着计算机计算能力的不断增强，实现控制律的大量运算将变得越来越可行了。基于非线性模型的控制律的一些实验报道见文献[5-9]，部分已经开始在工业机器人的控制器上得到应用。

如第9章所述，现在几乎所有的操作臂控制系统都由数字电路实现的，并且在一定的**采样速率**下运行。这表明位置（或者其他参量）传感器的读取方式是实时的离散点。由这些值计算出驱动器指令并发送给驱动器。因此，读取传感器和发送驱动器指令都不是连续的，而是以有限的采样速率进行的。为了分析由计算时间和有限采样速率产生的延迟影响，必须利用**离散时间控制**领域的研究方法。对于离散时间来说，微分方程变成了差分方程，相应地需用一套方法来解决离散系统的稳定性问题和极点配置问题。离散时间控制理论已经超出了本书的研究范围，不过离散时间系统的许多概念对许多操作臂控制领域的研究者来说是十分重要的（见文献[10]。）

尽管如此重要，离散时间控制理论的思想和方法还是难以应用于非线性控制中。虽然我

们已经努力设法写出了一个复杂的操作臂动力学运动微分方程，但是等价的离散形式的方程却不可能得到，因为，在给定一组初始条件、输入和有限的时间间隔的情况下，求解一般操作臂运动的唯一方法是采用数值积分（如第6章中所述）。仅当应用微分方程的级数解法或者近似解法才能得到离散时间模型。然而，如果需要通过近似方法建立一个离散模型，很难说有比采用连续模型进行连续时间近似更好的方法。总之，操作臂离散时间控制问题的分析是相当困难的，通常依赖于仿真来判断某一采样速率的性能效果。

通常假定计算速度足够快并且连续时间近似是有效的。

非线性前馈控制

前馈控制方法已被应用于非线性动力学模型，在这种控制律中不需要以伺服速率进行复杂的耗时计算[11]。在图10-5中，控制律中基于模型的控制部分是在“伺服回路之中”的，在每个伺服时钟脉冲时这个回路中的信号是“流”过黑箱的。如果选择采样频率为200Hz， 297
那么操作臂的动力学模型必须以此速率计算。另一种控制系统如图10-6所示。在这个系统中，基于模型的控制部分在伺服环的“外面”。因而，可以有一个快速的内伺服环，此时只需将误差与增益相乘。而基于模型的力矩计算则在一个较低的速率下附加在内伺服环的计算之上。

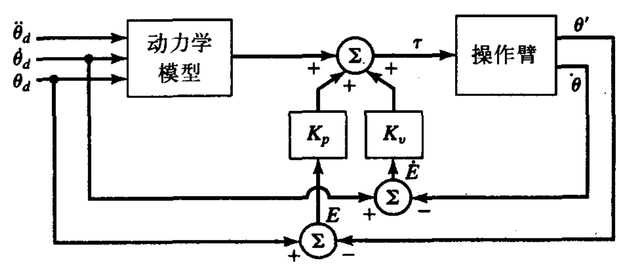


图10-6 基于模型的控制部分在伺服回路之“外”的控制方式

但是，图10-6所示的前馈控制方式并不能完全解耦。如果写出系统方程⊖，则系统的误差方程为

$$\ddot{E}+M^{-1}(\Theta)K_v\dot{E}+M^{-1}(\Theta)K_pE=0 \tag{10-19}$$

显然，随着操作臂位形的变化，有效的闭环增益将会改变，准静态极点也会在复平面上移动。然而，我们可以根据式（10-19）设计**鲁棒控制器**的起始点——即找到一组合适的常数增益，尽管存在极点“运动”，但仍然可以使它们保持在有利位置。另一种方法是随着操作臂位形的变化，事先计算出可变增益的值，从而使系统的准静态极点保持在固定位置。

注意，在图10-6所示系统中，动力学模型仅是期望轨迹的函数，因此当事先已知期望轨迹时，可以在运动开始前“离线”计算出需要的数值。在运行时，则从存储器中读出预先计算好的力矩函数。同样，如果需要计算时变增益，同样可以事先将它们计算并存储下来。因此，这种控制方式运行时计算量较小，从而可达到很高的伺服速率。

⊖ 为简化起见，假定 $M(\Theta_d)\cong M(\Theta)$, $V(\Theta_d,\dot{\Theta}_d)\cong(V(\Theta,\dot{\Theta}))$, $G(\Theta_d)\cong G(\Theta)$ 以及 $F(\Theta_d,\dot{\Theta}_d)\cong F(\Theta,\dot{\Theta})$

双速率计算力矩方法

图10-7所示是一种实际的解耦及线性化的位置控制系统原理框图。动力学模型以形位空
298 间的形式描述，因此操作臂的动力学参数只是操作臂位置的函数。这些函数可以在后台进行计算，或者在另一台控制计算机上计算[8]，或者查阅预先计算的表格[12]。按照这种控制结构，可以以低于闭环伺服速率的速度更新动力学参数。比如，闭环伺服频率为250Hz时，可以以60Hz的频率进行后台计算。

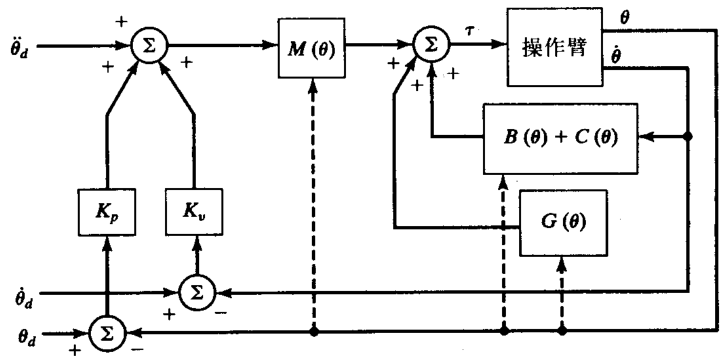


图10-7 基于模型的操作臂控制系统的实现方法

缺少参数信息的情况

应用计算力矩控制算法的第二个潜在困难是难以精确得到操作臂的动力学模型。对于动力学模型的某些参数尤其如此，例如摩擦效应。实际上，通常很难确定摩擦模型的结构，更不用说参数的值[13]。此外，如果操作臂的某些动力学参数不具有重复性——例如，由于机器人的老化——则难以得到任何时候都适用这个动力学模型的参数值。

自然，大部分机器人总是要抓持各种工件和工具。当机器人抓握着工具时，工具的惯量和重量改变了操作臂的动力学特性。在工程应用中，工具的质量分布可能是已知的，这时，可以用它计算控制律中基于模型的部分。当抓持工具时，操作臂末端连杆的惯量矩阵、总质量以及质心可以按照末端连杆和工具合成后的值重新修正。然而，在许多应用中，操作臂抓持物体的质量分布一般不是已知的，因此要保证动力学模型的精确性是很困难的。

对于一个最简单的非理想情况，假定模型是精确的，且以连续时间运行，只有外部噪声作用在系统上。图10-8中所示为作用在关节上的干扰力矩矢量。包含这些未知干扰的系统误差方程为

299
$$\ddot{E} + K_v\dot{E} + K_pE = M^{-1}(\Theta)\tau_d \tag{10-20}$$

式中τ_d是作用在关节上的干扰力矩矢量。式（10-20）的左边是解耦的，但是，从右边可以看出，在任意一个关节上的干扰都将给其他关节造成误差，因为$M(\Theta)$一般不是对角阵。

基于式（10-20）可以作一些简单分析。例如，很容易计算出一个恒定干扰产生的稳态伺服误差为

$$E = K_p^{-1}M^{-1}(\Theta)\tau_d \tag{10-21}$$

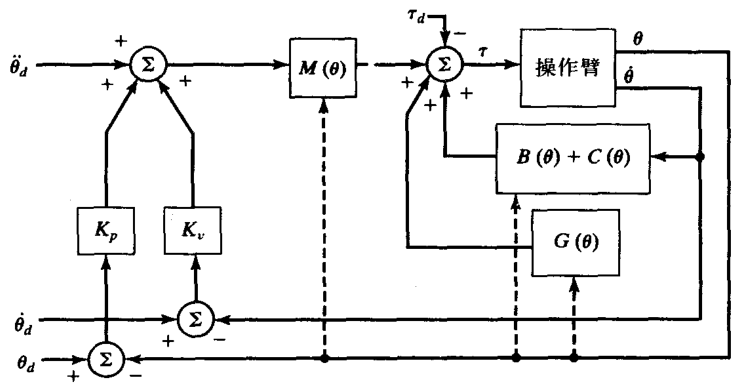


图10-8 有外部干扰作用的基于模型的控制器

如果操作臂的动力学模型不完善，则对得到的闭环系统进行分析就变得更加困难。为此定义符号如下：$\hat{M}(\Theta)$ 是操作臂惯量矩阵$M(\Theta)$的模型参数。同样，$\hat{V}(\Theta,\dot{\Theta})$、$\hat{G}(\Theta)$、$\hat{F}(\Theta,\dot{\Theta})$分别是实际机构的速度项、重力项和摩擦力项的模型参数。完全精确的模型是指

$$\begin{aligned}\hat{M}(\Theta)&=M(\Theta)\\ \hat{V}(\Theta,\dot{\Theta})&=V(\Theta,\dot{\Theta})\\ \hat{G}(\Theta)&=G(\Theta)\\ \hat{F}(\Theta,\dot{\Theta})&=F(\Theta,\dot{\Theta})\end{aligned} \tag{10-22}$$

因而，虽然已知操作臂的动力学方程为

$$\tau=M(\Theta)\ddot{\Theta}+V(\Theta,\dot{\Theta})+G(\Theta)+F(\Theta,\dot{\Theta}) \tag{10-23}$$

而采用的控制律计算却是

$$\begin{aligned}\tau&=\alpha\tau'+\beta\\ \alpha&=\hat{M}(\Theta)\\ \beta&=\hat{V}(\Theta,\dot{\Theta})+\hat{G}(\Theta)+\hat{F}(\Theta,\dot{\Theta})\end{aligned} \tag{10-24}$$ 300

因而，当已知参数不精确时，解耦和线性化就无法很好地完成。所得到的系统闭环方程为

$$\begin{aligned}&\ddot{E}+K_v\dot{E}+K_pE\\ &=\hat{M}^{-1}[(M-\hat{M})\ddot{\Theta}+(V-\hat{V})+(G-\hat{G})+(F-\hat{F})]\end{aligned} \tag{10-25}$$

为简明起见，式中没有写出动力学函数的自变量。注意，如果模型是精确的，则式（10-22）成立，从而式（10-25）的右边为零，误差消失。当参数不能精确知道时，实际参数与模型参数不一致，则根据十分复杂的式（10-25）计算，将会引起伺服误差（甚至可能导致系统失稳[21]）。

关于非线性闭环系统的稳定性分析将在10.7节中进行讨论。

10.6 当前的工业机器人控制系统

正因为参数的精确性问题，因此难以确知是否值得花费精力为操作臂控制去计算一个复

杂的基于模型的控制律。以足够快的速率计算操作臂模型，在计算能力上的花费可能并不值得，尤其是当模型参数不准确时，这种方法是无益的。工业机器人的制造厂商们从经济方面考虑，认为在控制器中使用一个完备的操作臂模型是不值得的。相反，当前的操作臂都使用很简单的控制律，一般只进行误差补偿，控制方式是在9.10节中讨论过的。图10-9所示为一具有高性能伺服系统的工业机器人。

独立关节PID控制

据了解，当今大部分工业机器人的控制方式可描述如下

$$\alpha = I$$
$$\beta = 0 \tag{10-26}$$

式中I是$n \times n$单位矩阵。伺服控制部分为

$$\tau' = \ddot{\Theta}_d + K_v \dot{E} + K_p E + K_i \int E dt \tag{10-27}$$

式中K_v、K_p和K_i为常数对角阵。在许多情况下，$\ddot{\Theta}_d$未知，因此可简单地设为零。也就是说，大部分简单的机器人控制器在控制律中根本不使用基于模型的控制部分。这种类型的PID控制方式是很简单的，因为每个关节都被作为一个独立的控制系统来控制。如同9.10节中讨论过的，通常每个关节都使用一个微处理器来完成式（10-27）的计算。

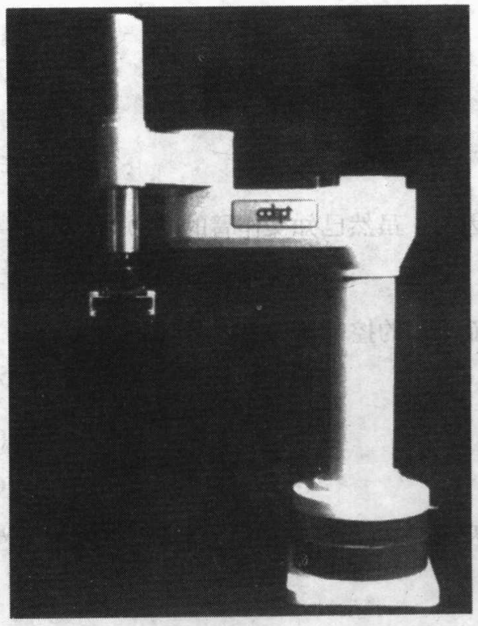


图10-9 AdeptOne，Adept技术公司制造的直接驱动机器人

用这种方式控制的操作臂的性能并不容易描述。由于没有进行解耦，因此每个关节的运动都会对其他关节产生影响。这种相互影响引起的误差可通过误差补偿控制律进行抑制。要选择一个固定增益，使操作臂在任何位形时对干扰的响应都处于临界阻尼状态是不可能的。因而，通常选择“平均”增益，使机器人工作空间的中心位置接近临界阻尼状态。当操作臂处于各种极端位形时，系统为欠阻尼或过阻尼状态。根据机器人机械设计的具体情况，可使这种影响相当小，此时控制效果较好。在这种系统中，重要的是要保证尽可能高的增益，这样可使无法避免的干扰很快得到抑制。

附加重力补偿

由于重力项容易引起静态定位误差，所以有些机器人生产商在控制律中包含了一个重力项$G(\theta)$（即$\beta = \hat{G}(\Theta)$）。总的控制律具有如下形式

301~302

$$\tau' = \ddot{\Theta}_d + K_v \dot{E} + K_p E + K_i \int E dt + \hat{G}(\Theta) \tag{10-28}$$

这个控制律可能是基于模型的控制器的最简单的例子。由于在式（10-28）中不再能严格按照

单关节控制的模式进行计算，所以控制器的结构必须具有在各关节控制器之间进行通讯的功能，或者只应用一个中央处理器代替各关节处理器。

解耦控制的各种近似方法

对于特定的操作臂，可采用各种不同的方法对动力学方程进行简化[3,14]。经简化后，可以导出一个近似的解耦及线性化控制律。通常的简化方法是把速度项产生的力矩分量忽略掉——即模型中只有惯量项和重力项。一般在控制器中也不包含摩擦模型，因为很难建立正确的摩擦模型。有时也对惯量矩阵进行简化，只考虑关节轴之间的主要耦合，不考虑次要的交叉耦合效应。例如，文献[14]提出了PUMA560质量矩阵的一种简化模型，需要的计算量仅为计算完整质量矩阵的10%，而精度在1%以内。

10.7 李雅普诺夫稳定性分析

在第9章中，我们用阻尼和闭环带宽来对线性系统进行稳定性和动态响应性能的评价。对于非线性系统，利用完备的基于模型的非线性控制器进行解耦和线性化，这种分析方法同样有效，因为最后得到的系统仍是线性的。但是，当控制器没有进行解耦和线性化，或解耦和线性化不完全或不精确时，整个闭环系统仍然是非线性的。对于非线性系统，稳定性和性能分析要困难得多。在本节，我们介绍一种对线性和非线性系统都适用的稳定性分析方法。

我们以第9章中介绍的简单的有摩擦质量弹簧系统为例，其运动方程为

$$m\ddot{x}+b\dot{x}+kx=0 \tag{10-29}$$

系统的总能量为

$$\upsilon=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}kx^2 \tag{10-30}$$

式中第一项为质量块的动能，第二项为储存在弹簧中的势能。注意，系统能量υ总是非负的（即为正或零）。将式（10-30）对时间求导得到总能量的变化率

$$\dot{\upsilon}=m\dot{x}\ddot{x}+kx\dot{x} \tag{10-31}$$

将式（10-29）代入式（10-31）消去 $m\ddot{x}$，得

$$\dot{\upsilon}=-b\dot{x}^2 \tag{10-32}$$

可以看出该值总是非正的（因为$b>0$）。这说明系统的能量总是在耗散的，除非 $\dot{x}=0$ 。由此得出结论，系统受到初始干扰，将不断丧失能量直到静止状态。用稳态分析方法式（10-29）考察系统可能的静止位置，得 303

$$kx=0 \tag{10-33}$$

即

$$x=0 \tag{10-34}$$

因此，通过能量分析可知，式（10-29）所示的系统在任何初始条件下（即任何初始能量），最终都将稳定在平衡点。这种基于能量分析的稳定性证明方法是一种一般方法的简单例子，这个一般方法是以19世纪的俄国数学家李雅普诺夫的名字命名的，称为**李雅普诺夫稳定性分析或第二类李雅普诺夫方法（或直接法）**[15]。

这种稳定性分析方法的一个显著特点是不需要求解控制系统的微分方程即可判断系统的稳定性。然而，虽然李雅普诺夫方法可以判断稳定性，但它通常无法提供任何有关瞬时响应或系统性能的信息。注意，这种能量分析方法不能给出系统是过阻尼或欠阻尼的信息，也不能给出系统抑制干扰所需的时间。稳定性和动态性能的主要区别在于：虽然系统是稳定的，但它的控制性能可能并不令人满意。

李雅普诺夫方法比前述的例子更具一般性。它是为数不多的几种能够直接应用到非线性系统上的稳定性分析方法之一。为了很快了解李雅普诺夫方法（满足我们的具体需要），我们将简单介绍一下这个理论，然后直接分析几个实例。更完整的李雅普诺夫理论分析方法可参见文献[16, 17]。

李雅普诺夫方法用于确定下列微分方程的稳定性

$$\dot{X} = f(X) \tag{10-35}$$

式中，X为$m \times 1$矢量，$f(\cdot)$可以是非线性函数。注意，高阶微分方程总是可以被写成一组形式为式（10-35）的一阶微分方程。为了用李雅普诺夫方法证明一个系统是否稳定，必须构造一个具有如下性质的广义能量函数$\upsilon(X)$:

1. $\upsilon(X)$具有连续的一阶偏导数，对于任意X有$\upsilon(X)>0$，且$\upsilon(0)=0$除外;
2. $\dot{\upsilon}(X) \leqslant 0$，$\dot{\upsilon}(X)$指$\upsilon(X)$在系统所有轨迹上的变化率。

若这些性质仅在特定区域成立，则相应的系统为弱稳定的；若这些性质在全局成立，则相应的系统为强稳定的。可直观解释为，一个正定的“能量形式”的状态函数，其值是一直减小的或保持为常数——则系统是稳定的，即系统的状态矢量是有界的。

304 若$\dot{\upsilon}(X)$严格小于零，则系统的状态是渐近收敛于零矢量。LaSalle和Lefschetz[4]对李雅普诺夫最初的工作做了重要发展，他们指出，在一定情况下，即使当$\dot{\upsilon}(X) \leqslant 0$（注意包含等号），系统也是渐近稳定。为此，可以通过稳态分析讨论$\dot{\upsilon}(X)=0$时的情况，以便确定这个系统是渐近稳定的，还是“粘结在”$\upsilon(X)=0$以外的某处。

式（10-35）所描述的系统被称为**自治系统**，因为函数$f(\cdot)$不是时间的显函数。李雅普诺夫方法也可以推广到**非自治系统**中去，其中时间是非线性函数的自变量。详见文献[4,17]。

例10.4

对于一个线性系统

$$\dot{X} = -AX \tag{10-36}$$

式中A为$m \times m$正定矩阵。假定**选取李雅普诺夫函数**为

$$\upsilon(X) = \frac{1}{2}X^T X \tag{10-37}$$

该函数是连续且非负的。将其微分得

$$\begin{aligned}\dot{\upsilon}(X) &= X^T \dot{X} \\ &= X^T(-AX) \\ &= -X^T AX\end{aligned} \tag{10-38}$$

因为A是正定阵，因此该函数是非正的。因此，式（10-37）确实是式（10-36）所示系统的李雅普诺夫函数。该系统是渐近稳定的，因为$\dot{\upsilon}(X)$仅在X=0处为零，而在其他位置X一定是减小的。■

例10.5

某机械弹簧阻尼系统中弹簧和阻尼器均为非线性的:

$$\ddot{x}+b(\dot{x})+k(x)=0 \tag{10-39}$$

函数$b(\cdot)$和$k(\cdot)$为一、三象限的连续函数，使得

$$\begin{aligned}\dot{x}b(\dot{x})>0 \text{ 对于} x\neq 0\\ xk(x)>0 \text{ 对于} x\neq 0\end{aligned} \tag{10-40}$$

假定李雅普诺夫函数

$$\upsilon(x,\dot{x})=\frac{1}{2}\dot{x}^2+\int_0^x k(\lambda)\,d\lambda \tag{10-41}$$ 305

从而得到

$$\begin{aligned}\dot{\upsilon}(x,\dot{x})&=\dot{x}\ddot{x}+k(x)\dot{x}\\ &=-\dot{x}b(\dot{x})-k(x)\dot{x}+k(x)\dot{x}\\ &=-\dot{x}b(\dot{x})\end{aligned} \tag{10-42}$$

因此，$\dot{\upsilon}(\cdot)$是非正的，且是半负定的，因为它只是$\dot{x}$的函数而不是x的函数。为了判断系统是否是渐近稳定的，还必须保证系统不会“粘结在”非零x的某处。为了研究所有$\dot{x}=0$的轨迹，需考查

$$\ddot{x}=-k(x) \tag{10-43}$$

x=0是上式的唯一解。因此，仅当$x=\dot{x}=\ddot{x}=0$时系统才是渐进稳定的。

■

例10.6

已知某操作臂的动力学方程为

$$\tau=M(\Theta)\ddot{\Theta}+V(\Theta,\dot{\Theta})+G(\Theta) \tag{10-44}$$

它的控制律为

$$\tau=K_pE-K_d\dot{\Theta}+G(\Theta) \tag{10-45}$$

式中K_p和K_d是对角增益矩阵。注意，这个控制器并不能使操作臂跟踪轨迹，但是可以沿操作臂动力学特性确定的路径到达目标点，并对目标位置进行调整。由式（10-44）和式（10-45）联立得到的闭环系统为

$$M(\Theta)\ddot{\Theta}+V(\Theta,\dot{\Theta})+K_d\dot{\Theta}+K_p\Theta=K_p\Theta_d \tag{10-46}$$

利用李雅普诺夫方法可以证明该系统是全局渐近稳定的[18, 19]。
假定选取李雅普诺夫函数为

$$\upsilon=\frac{1}{2}\dot{\Theta}^TM(\Theta)\dot{\Theta}+\frac{1}{2}E^TK_pE \tag{10-47}$$

式（10-47）总为正或零，因为操作臂质量矩阵$M(\Theta)$和位置增益矩阵K_p都是正定阵。对式

（10-47）求导得

$$\dot{\upsilon}=\frac{1}{2}\dot{\Theta}^T\dot{M}(\Theta)\dot{\theta}+\dot{\theta}^T M(\theta)\ddot{\Theta}-E^T K_p\dot{\Theta}$$
$$=\frac{1}{2}\dot{\Theta}^T\dot{M}(\Theta)\dot{\Theta}-\dot{\Theta}^T K_d\dot{\Theta}-\dot{\Theta}^T V(\Theta,\dot{\Theta}) \tag{10-48}$$
306 $$=-\dot{\Theta}^T K_d\dot{\Theta}$$

只要K_d正定，则该式非正。在式（10-48）的最后一式中，利用了一个有用的恒等式

$$\frac{1}{2}\dot{\Theta}^T\dot{M}(\Theta)\dot{\Theta}=\dot{\Theta}^T V(\Theta,\dot{\Theta}) \tag{10-49}$$

通过拉格朗日运动方程的结构分析可以证明这一恒等式[18~20]（亦可参见习题6.17）。

下面我们研究系统是否会“粘结在”某个非零误差之处，因为$\dot{\upsilon}$沿轨迹保持为零的必要条件是$\dot{\Theta}=0$和$\ddot{\Theta}=0$，在这种情况下，由式（10-46）可得

$$K_p E=0 \tag{10-50}$$

又因为K_p是非奇异的，则有

$$E=0 \tag{10-51}$$

因此，将控制律式（10-45）应用到系统式（10-44）可以达到全局渐近稳定。

这个结论之所以重要，是因为它在某种程度上解释了为什么当前的工业机器人能够正常工作的原因。大多数工业机器人采用简单的误差驱动伺服控制，有的包含重力模型，因而与式（10-45）的控制律非常相似。

■

习题10.11至10.16例举了更多的例子，运用李雅普诺夫方法判别非线性操作臂控制律的稳定性。近来在机器人学的研究文献中，李雅普诺夫理论的应用越来越多[18~25]。

10.8 基于笛卡儿空间的控制系统

在本节中将介绍基于**笛卡儿空间控制**的概念。尽管这类方法在当今的工业机器人中并没有应用，但一些研究机构正在开展这方面的研究。

与基于关节空间控制方法的比较

在此之前所讨论过的所有操作臂的控制方法中，都假定期望轨迹可以用关节位置、速度和加速度的时间历程来表达。已知这些期望输入是有效的，我们设计了基于**关节空间的控制**方法，这种方法是通过计算关节空间的期望值与实际值之差，从而得到轨迹误差。经常希望操作臂的末端执行器沿直线或其他在笛卡儿坐标系中描述的路径运动。如第7章所述，可以计算与笛卡儿坐标下的直线路径相对应的关节空间轨迹的时间历程。图10-10所示为这种操作臂轨迹控制方法的示意图。这种方法主要是一个**轨迹变换过程**，用于计算关节轨迹。然后通过
307 某种基于关节坐标的伺服控制实现轨迹跟踪，这是前面讨论过的。

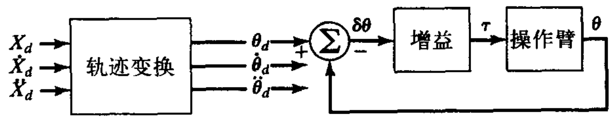


图10-10 具有笛卡儿路径输入的基于关节空间的控制方法

如果用解析方法完成轨迹变换过程，那是相当困难的（按照计算费用来说）。需要计算

$$\begin{aligned}\Theta_d &= INVKIN(\chi_d)\\ \dot{\Theta}_d &= J^{-1}(\Theta)\dot{\chi}_d \\ \ddot{\Theta}_d &= \dot{J}^{-1}(\Theta)\dot{\chi}_d + J^{-1}(\Theta)\ddot{\chi}_d\end{aligned} \tag{10-52}$$

在当前的系统中完成这种计算，通常应用逆运动学方法求解Θ_d，然后用一阶和二阶差分的数值计算方法求出关节速度和加速度。但是，数值微分容易将噪声放大并引起延迟，除非采用一个专门的滤波器⊖。因此，我们希望找到计算式（10-52）时计算量较小的方法，或者给出一种不需要这些信息的控制方法。

另一种方案如图10-11所示。在这里，检测到的操作臂位置立即由运动学方程变换成笛卡儿坐标下的位置，将它与期望的笛卡儿坐标位置进行比较，得到笛卡儿空间下的误差。这种基于笛卡儿空间误差的控制方法称为基于**笛卡儿空间的控制**方法。为简明起见，在图10-11中未表示速度反馈，但它在任何情况下都是存在的。

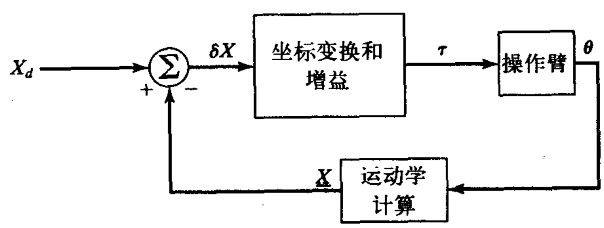


图10-11 基于笛卡儿空间的控制方法示意图

轨迹变换过程可被伺服环中的坐标变换所代替。注意，基于笛卡儿坐标控制器的许多计算必须在反馈环内部进行，即运动学计算和其他变换现在都是在“反馈环内部”进行的。这是基于笛卡儿坐标方法的一个缺点；这种系统与基于关节空间系统相比，运行时的采样频率 308
较低（当计算机容量相同时）。通常情况下这会降低系统的稳定性和抗干扰性能。

笛卡儿空间的直接控制方法

我们很容易得出一种相当直观的控制方法，见图10-12。这种方法是将笛卡儿空间位置与期望位置比较，得到笛卡儿空间下的误差δX。当控制系统正常工作时，这个误差可以被认为很小，并可以用逆雅可比方法映射成关节空间内的小位移。将得到的关节空间误差$\delta\theta$乘以增益来计算使误差减小的转矩。注意，为简明起见，图10-12所示的简化控制器中省略了速度反馈部分。速度反馈可以直接附加到图中。这种方法称为**逆雅可比控制器**。

⊖ 数值微分会产生延迟，除非它可以基于过去、当前和将来值进行计算。当整个路径已预先规划好时，这种非因果关系的数值微分则可以完成。

另一种容易想到的方法如图10-13所示。这种方法是将笛卡儿空间误差矢量乘以增益来计算笛卡儿坐标系下的力矢量。可以将这个力矢量看成是施加在机器人末端执行器上的一个笛卡儿空间的力，它使末端执行器向着笛卡儿空间误差减小的方向运动。将这个笛卡儿坐标系下的力矢量（实际上是一个力-力矩矢量）通过雅可比转置矩阵映射成当量关节力矩，这样可以减小观测到的误差。这种方法称为**转置雅可比控制器**。

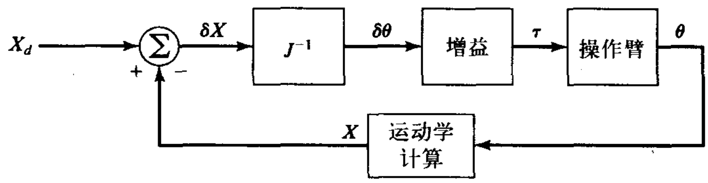


图10-12 逆雅可比笛卡儿空间控制方法

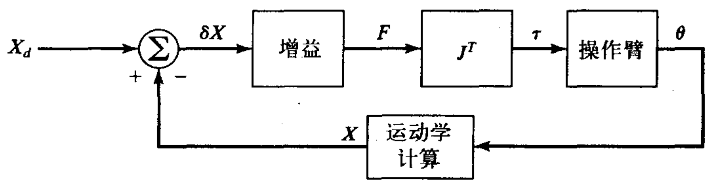


图10-13 转置雅可比笛卡儿空间控制方法

逆雅可比控制器和转置雅可比控制器都是一种直观的控制方法，因此难以确定这些方法是稳定的，更不用说它的性能了。然而这两个控制器是如此相似，区别只是一个是逆雅可比、另一个是转置雅可比。切记，一般雅可比逆矩阵和雅可比转置矩阵是不相等的（只有严格限
309 制在笛卡儿空间的操作臂才有$J^T=J^{-1}$）。这些系统的精确的动力学特性（比如，用二阶误差空间方程表示的系统）是很复杂的。事实是，这两种控制方法都能够工作（即都是稳定的），但工作性能不太好（即在整个工作空间的性能不是都很好）。都可以通过选择适当的增益使系统工作稳定，包括某种形式的速度反馈（在图10-12和图10-13中未画出）。然而它们都不是*精确*的控制方法，即我们无法选择固定的增益来得到固定的闭环极点。这两种控制器的动力学响应都会随着操作臂位形的变化而变化。

笛卡儿空间解耦控制方法

与基于关节空间控制器一样，基于笛卡儿空间的控制器也应该使操作臂在所有位形下的动力学误差均为常量。而在基于笛卡儿空间控制方法中，误差是在笛卡儿空间表示的，这表明对于所设计的系统，应使其在所有可能的位形下，都可将笛卡儿空间误差限制在临界阻尼状态。

正如基于关节空间的控制器一样，一个性能优良的笛卡儿空间控制器的前提条件是操作臂的线性化和解耦模型。因此，我们必须用笛卡儿坐标的变量写出操作臂的动力学方程。这可以用第6章中讨论过的方法实现，得到的运动方程形式与关节空间的方程十分相似。刚体动力学方程可以写作

$$\mathcal{F} = M_x(\Theta)\ddot{\chi} + V_x(\Theta,\dot{\Theta}) + G_x(\Theta) \qquad (10\text{-}53)$$

式中$\mathcal{F}$为作用在机器人末端执行器上的虚拟操作力-力矩矢量，χ是一个适当表示末端执行器

位置和姿态的笛卡儿坐标矢量[8]。与关节空间的参数类似，$M_x(\Theta)$是笛卡儿空间的质量矩阵，$V_x(\Theta,\dot{\Theta})$是笛卡儿空间的速度项矢量，$G_x(\Theta)$是笛卡儿空间的重力项矢量。

与以前处理基于关节坐标的控制问题一样，可以在一个解耦和线性化控制器中应用动力学方程。因为已从式（10-53）计算出作用在机器人末端执行器上的虚拟笛卡儿力矢量$\mathcal{F}$，那么就可以使用雅可比转置矩阵来实现这个控制——也就是说，用式（10-53）计算出$\mathcal{F}$之后，实际上已无法将一个笛卡儿空间的力施加到末端执行器上，相反，如果应用下式就可计算出能够有效平衡系统的关节力矩：

$$\tau = J^T(\Theta)\,\mathcal{F} \tag{10-54}$$

图10-14所示为完全动力学解耦的笛卡儿空间操作臂控制系统。注意转置雅可比是在操作臂之前。可看出，图10-14所示的控制器可以直接描述笛卡儿路径而不需要进行轨迹变换。

与关节空间的情况相同，在实际应用中最好使用双速率控制系统。图10-15所示为一个基于笛卡儿坐标系的解耦和线性化控制器示意图，其中的动力学参数只是操作臂位置的函数。这些动力学参数由后台或另一台控制计算机在一个低于伺服速率的频率下更新。这个方案是比较合理的，因为我们希望伺服速率尽量快（可能为500Hz或更高），以便最大限度地抑制干扰和保持稳定性。由于动力学参数只是操作臂位置的函数，因此只需在一个能够跟得上操作臂位形变化的速率下更新它们的值。参数更新速率可能不需要高于100Hz[8]。 310

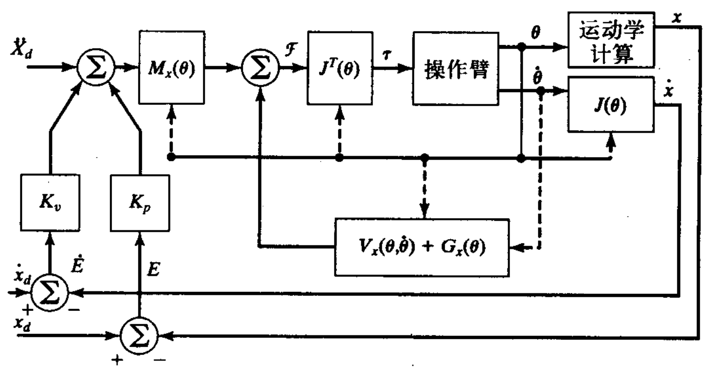


图10-14 基于模型的笛卡儿空间控制方法

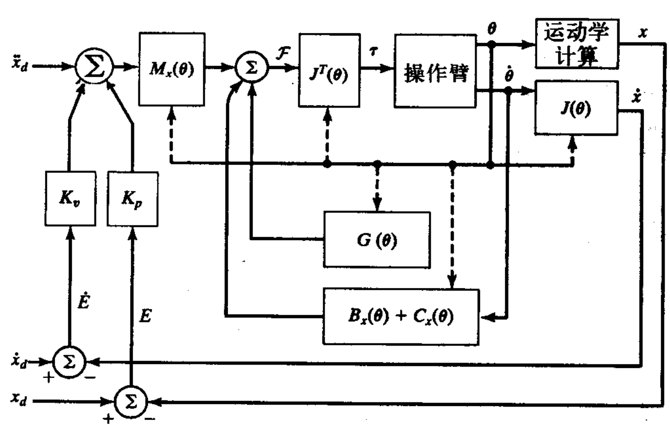


图10-15 基于模型的笛卡儿空间控制的实现方法

10.9 自适应控制

311 在基于模型的控制方法的讨论中，我们常发现操作臂的参数不能精确已知。当模型中的参数与实际系统中的参数不符时，会产生伺服误差，如式（10-25）所示。可以利用伺服误差，驱动某种自适应控制方法去更新模型参数的值，直到这些伺服误差消失。目前已经提出了几种自适应方法。

一种理想的自适应方法如图10-16所示。这里使用了在本章中推导的基于模型的控制律。自适应控制过程如下，已知操作臂的状态和伺服误差，系统将调整非线性模型中的参数值，直到误差消失。这种系统会学习系统本身的动力学特性。自适应控制方法的设计和分析已超出了本书的范围。图10-16所示为这种控制方法的具体结构，文献[20, 21]证明了这种方法的全局稳定性。与之相关的技术参见文献[22]。

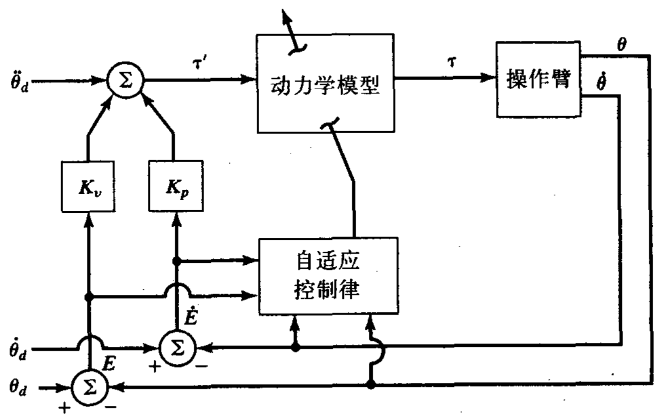


图10-16 自适应操作臂控制器示意图

参考文献

[1] R.P. Paul, "Modeling, Trajectory Calculation, and Servoing of a Computer Controlled Arm," Technical Report AIM-177, Stanford University Artificial Intelligence Laboratory, 1972.

[2] B. Markiewicz, "Analysis of the Computed Torque Drive Method and Comparison with Conventional Position Servo for a Computer-Controlled Manipulator," Jet Propulsion Laboratory Technical Memo 33–601, March 1973.

[3] A. Bejczy, "Robot Arm Dynamics and Control," Jet Propulsion Laboratory Technical Memo 33–669, February 1974.

[4] J. LaSalle and S. Lefschetz, *Stability by Liapunov's Direct Method with Applications*, Academic Press, New York, 1961.

[5] P.K. Khosla, "Some Experimental Results on Model-Based Control Schemes," IEEE Conference on Robotics and Automation, Philadelphia, April 1988.

[6] M. Leahy, K. Valavanis, and G. Saridis, "The Effects of Dynamic Models on Robot
312 Control," IEEE Conference on Robotics and Automation, San Francisco, April 1986.

[7] L. Sciavicco and B. Siciliano, *Modelling and Control of Robot Manipulators*, 2nd Edition, Springer-Verlag, London, 2000.

[8] O. Khatib, "A Unified Approach for Motion and Force Control of Robot Manipula-

tors: The Operational Space Formulation," *IEEE Journal of Robotics and Automation*, Vol. RA-3, No. 1, 1987.

[9] C. An, C. Atkeson, and J. Hollerbach, "Model-Based Control of a Direct Drive Arm, Part II: Control," IEEE Conference on Robotics and Automation, Philadelphia, April 1988.

[10] G. Franklin, J. Powell, and M. Workman, *Digital Control of Dynamic Systems*, 2nd edition, Addison-Wesley, Reading, MA, 1989.

[11] A. Liegeois, A. Fournier, and M. Aldon, "Model Reference Control of High Velocity Industrial Robots," *Proceedings of the Joint Automatic Control Conference*, San Francisco, 1980.

[12] M. Raibert, "Mechanical Arm Control Using a State Space Memory," SME paper MS77-750, 1977.

[13] B. Armstrong, "Friction: Experimental Determination, Modeling and Compensation," IEEE Conference on Robotics and Automation, Philadelphia, April 1988.

[14] B. Armstrong, O. Khatib, and J. Burdick, "The Explicit Dynamic Model and Inertial Parameters of the PUMA 560 Arm," IEEE Conference on Robotics and Automation, San Francisco, April 1986.

[15] A.M. Lyapunov, "On the General Problem of Stability of Motion," (in Russian), Kharkov Mathematical Society, Soviet Union, 1892.

[16] C. Desoer and M. Vidyasagar, *Feedback Systems: Input–Output Properties*, Academic Press, New York, 1975.

[17] M. Vidyasagar, *Nonlinear Systems Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1978.

[18] S. Arimoto and F. Miyazaki, "Stability and Robustness of PID Feedback Control for Robot Manipulators of Sensory Capability," Third International Symposium of Robotics Research, Gouvieux, France, July 1985.

[19] D. Koditschek, "Adaptive Strategies for the Control of Natural Motion," *Proceedings of the 24th Conference on Decision and Control*, Ft. Lauderdale, FL, December 1985.

[20] J. Craig, P. Hsu, and S. Sastry, "Adaptive Control of Mechanical Manipulators," IEEE Conference on Robotics and Automation, San Francisco, April 1986.

[21] J. Craig, *Adaptive Control of Mechanical Manipulators*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1988.

[22] J.J. Slotine and W. Li, "On the Adaptive Control of Mechanical Manipulators," *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 6, No. 3, 1987.

[23] R. Kelly and R. Ortega, "Adaptive Control of Robot Manipulators: An Input–Output Approach," IEEE Conference on Robotics and Automation, Philadelphia, 1988.

[24] H. Das, J.J. Slotine, and T. Sheridan, "Inverse Kinematic Algorithms for Redundant Systems," IEEE Conference on Robotics and Automation, Philadelphia, 1988.

[25] T. Yabuta, A. Chona, and G. Beni, "On the Asymptotic Stability of the Hybrid Position/Force Control Scheme for Robot Manipulators," IEEE Conference on Robotics and Automation, Philadelphia, 1988. 313

习题

10.1 [15]对于系统

$$\tau = (2\sqrt{\theta}+1)\ddot{\theta} + 3\dot{\theta}^2 - \sin\theta$$

写出$\alpha-\beta$分解运动控制器的非线性控制方程。选择增益使系统始终工作在$k_{CL}=10$的临界阻尼状态下。

10.2 [15] 对于系统

$$\tau = 5\theta\dot{\theta} + 2\ddot{\theta} - 13\dot{\theta}^3 + 5$$

写出$\alpha-\beta$分解运动控制器的非线性控制方程。选择增益使系统始终工作在$k_{CL}=10$的临界阻尼状态下。

10.3 [19]根据6.7节中的二连杆操作臂，画出一个关节空间控制器的框图，使得操作臂在整个工作空间都处于临界阻尼状态。并在各方框内标出相应的方程。

10.4 [20] 根据6.7节中的二连杆操作臂，画出一个笛卡儿空间控制器的框图，使得操作臂在整个工作空间都处于临界阻尼状态（见例6.6）。并在各方框内标出相应的方程。

10.5 [18] 设计一个轨迹跟踪控制系统。系统的动力学方程如下

$$\tau_1 = m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_1 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2$$
$$\tau_2 = m_2 l_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + \upsilon_2 \dot{\theta}_2$$

你认为上述方程可以代表一个真实的系统吗？

10.6 [17]对于例10.3中设计的单连杆操作臂控制系统，写出关于质量参数的误差函数的稳态位置误差表达式。令$\psi_m = m - \hat{m}$。结果应为l，g，θ, ψ_m，$\hat{m}$和k_p的函数。操作臂在什么稳态位置时误差最大？

10.7 [26]对于图10-17所示的二自由度机械系统，设计一个控制器，使得x_1和x_2以临界阻尼状态跟踪轨迹和抑制干扰。

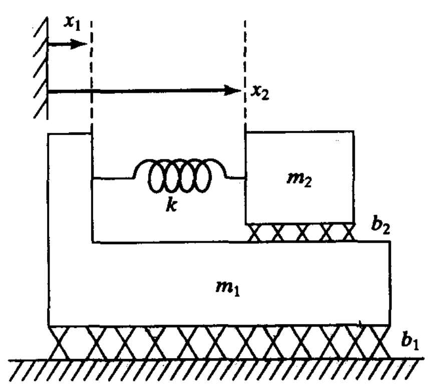


图10-17 具有二自由度的机械系统

10.8 [30]分析6.7节中的二连杆操作臂形位空间动力学方程，推导计算力矩值对微小偏差Θ的
314 灵敏度表达式。试求图10-7所示的控制器在正常运行时，控制器应每隔多长时间重新计算动力学参数，并表示成平均关节速度的函数。

10.9 [32] 分析例6.6中的二连杆操作臂在笛卡儿形位空间形式下的动力学方程。推导计算力矩值对微小偏差Θ的灵敏度表达式。试求图10-15所示的控制器在正常运行时，控制器应每隔多长时间重新计算动力学参数，并表示成平均关节速度的函数。

10.10 [15] 设计一个控制系统

$$f = 5x\dot{x} + 2\ddot{x} - 12$$

选择增益使系统始终工作在闭环刚度为20的临界阻尼状态下。

10.11 [20]对于一个位置校正系统（不失一般性），假设$\Theta_d = 0$。证明控制律

$$\tau = -K_p\Theta - M(\Theta)K_v\dot{\Theta} + G(\Theta)$$

得到的是渐近稳定的非线性系统。可以取K_v为$K_v = k_v I_n$的形式，式中k_v为标量，I_n为$n \times n$单位矩阵。提示：这与例10.6类似。

10.12[20] 对于一个位置校正系统（不失一般性），假设$\Theta_d = 0$。证明控制律

$$\tau = -K_p\Theta - \hat{M}(\Theta)K_v\dot{\Theta} + G(\Theta)$$

得到的是渐近稳定的非线性系统。可以取K_v为$K_v = k_v I_n$的形式，式中k_v为标量，I_n为$n \times n$单位矩阵。矩阵$\hat{M}(\Theta)$是操作臂质量矩阵的正定估计值。提示：这与例10.6类似。

10.13 [25] 对于一个位置校正系统（不失一般性），假设$\Theta_d = 0$。证明控制律

$$\tau = -M(\Theta)(K_p\Theta + K_v\dot{\Theta}) + G(\Theta)$$

得到的是渐近稳定的非线性系统。可以取K_v为$K_v = k_v I_n$的形式，式中k_v为标量，I_n为$n \times n$单位矩阵。提示：这与例10.6类似。

10.14 [26] 对于一个位置校正系统（不失一般性），假设$\Theta_d = 0$。证明控制律

$$\tau = -M(\Theta)(K_p\Theta + K_v\dot{\Theta}) + G(\Theta)$$

得到的是渐近稳定的非线性系统。可以取K_v为$K_v = k_v I_n$的形式，式中k_v为标量，I_n为$n \times n$单位矩阵。矩阵$\hat{M}(\Theta)$是操作臂质量矩阵的正定估计值。提示：这与例10.6类似。

10.15 [28] 对于一个位置校正系统（不失一般性），假设$\Theta_d = 0$。证明控制律

$$\tau = -K_p\Theta - K_v\dot{\Theta}$$ 315

得到的是稳定的非线性系统，证明这个系统不是渐近稳定的，并给出稳态误差的表达式。提示：这与例10.6类似。

10.16 [30]证明10.8节中介绍的转置雅可比笛卡儿空间控制器的全局稳定性。用适当形式的速度反馈使系统稳定。提示：参见文献[18]。

10.17 [15] 设计一轨迹跟踪控制器，系统的动力学方程为

$$f = ax^2\dot{x}\ddot{x} + b\dot{x}^2 + c\sin x$$

使其在所有位形下都可将误差限制在临界阻尼状态。

10.18 [15]系统的开环动力学方程为

$$\tau = m\ddot{\theta} + b\dot{\theta}^2 + c\dot{\theta}$$

采用控制律为

$$\tau = m(\ddot{\theta}_d + k_v\dot{e} + k_p e) + \sin\theta$$

写出闭环系统的微分方程。

编程习题

重复第9章的编程习题，应用相同的测试方法，但这个控制器使用三连杆完整动力学模型来对系统进行解耦和线性化。对本例中，有

$$K_p = \begin{bmatrix} 100.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 100.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 100.0 \end{bmatrix}$$

选择对角阵K_v，以保证在所有操作臂位形下系统都处于临界阻尼状态。并将结果与第9章编程
316 习题中简化控制器所得的结果进行比较。

第11章 操作臂的力控制

11.1 概述

当操作臂在空间中跟踪轨迹运动时，可采用位置控制，但当末端执行器与操作臂工作环境发生碰撞时，纯粹的位置控制已经不适用了。考虑使用海绵擦窗的操作臂，利用海面的柔性可以通过控制末端执行器与玻璃之间的位置来调整施加在窗户上的力。如果海绵十分柔软，或者已知玻璃的精确位置，则操作臂可以工作得很好。

但是，如果末端执行器、工具或环境的刚性很高，则操作臂压贴在平面上的操作执行起来就非常困难。假设不使用海绵擦洗，而是操作臂使用刚性刮削工具从玻璃表面刮油漆。如果距离玻璃表面的位置存在任何不确定性，或者操作臂存在任何位置误差，则完成该项工作是不可能的。要么玻璃被碰碎，要么操作臂在玻璃上方摆动而不与玻璃接触。

在清洗和刮擦这两个任务中，可能不指定玻璃表面的位置，而是*指定一个垂直于玻璃表面的力*更为合理。

前几章中介绍的方法在工业机器人中应用较多，而在本章中介绍的方法还都未在工业机器人中使用，只有一些极其简单的方法除外。本章主要介绍**力位混合控制器**，可以预见，通过这种控制器工业机器人终究会应用于需要执行力控制的任务中。然而，无论哪种方法应用于工业实际，本章介绍的许多概念始终是有效的。 317

11.2 工业机器人在装配作业中的应用

大多数工业机器人都应用于相对**简单的应用场合**，如点焊、喷涂、抓取和放置操作。力控制已经在一些场合得到应用，例如，一些机器人已经能够实现简单的力控制，如磨削和去毛刺。显然工业机器人的下一个大量应用领域将会是在装配线作业中执行一个或多个零件的装配任务。在这种**零件装配**任务中，接触力的监控非常重要。

面对工作环境的不确定性和变化，操作臂的精确控制是将机器人应用于工业装配操作中的先决条件。给机械手装上传感器，以给出操作任务的状态信息，这样就可以使机器人完成装配任务，这似乎是机器人应用的重要进展。然而，目前操作臂的灵巧性仍较低，限制了它们在自动化装配领域的应用。

使用操作臂完成装配任务要求零件之间的位置精度非常高。目前工业机器人一般不能胜任如此精确的任务，因此制造这种机器人可能没有意义。高精度操作臂只能以尺寸、重量、成本为代价来实现。然而，测量和控制手部产生的接触力为提高操作臂的精度提供了一种有效的方法。由于使用相对测量方法，操作臂和被操作对象的绝对位置误差不像它们在纯位置控制系统中那样重要了。当中等刚度的零件相互作用时，相对位置的微小变化会产生很大的接触力，因此，了解并控制这些力可以极大地提高有效位置精度。

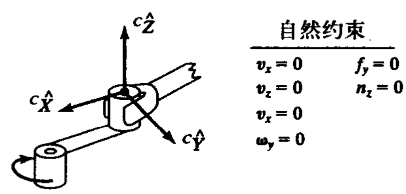
11.3 局部约束任务中的控制坐标系

本章中提出的方法是基于操作环境的控制坐标系的，在这个环境中，操作臂的运动受到一个或多个接触面[1~3]的约束。描述部分约束的坐标系是基于操作臂的末端执行器和环境之间相互作用的简化模型：因为我们仅需要描述接触和自由状态，因此只考虑由于接触产生的力。这相当于进行准静态分析并忽略了其他静态力，如某些摩擦力和重力。如果系统中的作用力主要是刚度较大的物体之间的接触力，这种分析方法是合理的。注意，这里介绍的方法已进行了某些简化和限定，对于本文来说，这种介绍基本概念的方法较好，水平适当。与之相关的更一般、更严格的方法，请参阅文献[19]。

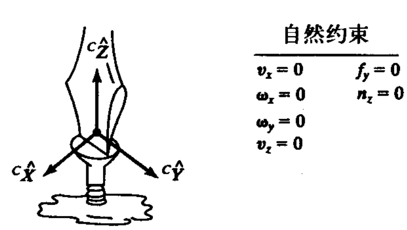
每一操作任务可以分解为多个子任务，这些子任务都是由操作臂末端执行器（即工具）和工作环境之间特定的接触状态定义的。对于每一个与这种子任务相关的约束，称为**自然约**
318 **束**，这些自然约束由操作位形特定的机械和几何特征形成。例如，一个与静态刚性表面接触的手臂不能自由穿过该表面。因此，存在自然位置约束。如果表面是无摩擦的，则手臂不能任意施加与表面相切的力。这样，就存在自然力约束。

在与环境接触的模型中，对于每一个子任务的位形，可以定义一个**广义表面**，它具有垂直于该表面的位置约束和正切于该表面的力约束。这两种类型的约束——力约束和位置约束将末端执行器可能的运动自由度数划分成两个正交集，必须根据不同的规则对这两组集合进行控制。注意，该接触模型并不包含所有可能的接触情况（更一般的方法参见文献[19]）。

图11-1所示为两个具有代表性的与自然约束有关的任务。注意，在每一情况下，按照坐标系$\{C\}$描述任务，这个坐标系称为**约束坐标系**，该坐标系位于与任务相关的位置上。根据任务，$\{C\}$可以固定在环境中，或者同操作臂末端执行器一起移动。在图11-1(a)中，约束坐标系固连在图中的手柄上并随手柄运动，规定 $\hat{X}$ 方向总是指向手柄的轴心。作用于指端的摩擦力确保能够可靠地抓住把手，该把手在一个心轴上，且能够相对于手柄转动。在图11-1(b)中，约束坐标系固连在螺丝刀的末端，工作时随螺丝刀一起转动。注意，在 $\hat{Y}$ 方向，力约束为零，因为螺钉上的槽允许螺丝刀在该方向滑动。在这些例子中，给定的约束集在整个任务中保持不变。对于更为复杂的情况，任务被分解成子任务，对于这些子任务，可以确定一个不变的自然约束集。



(a) 摇手柄



(b) 拧螺钉

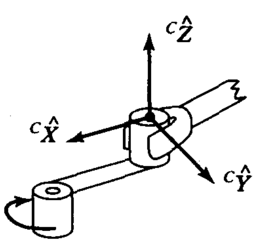
319 图11-1 两个不同任务的自然约束

在图11-1中，位置约束是通过在坐标系$\{C\}$中描述的末端执行器的速度分量$\mathcal{V}$来表示的。然而我们以前都是用位置表达式而不是用速度表达式来表示位置约束，在大多数情况下，将位置约束定义为“速度为零”的约束，可能更为简单。同样，可以通过在坐标系$\{C\}$中描述的施加在末端执行器上的力–力矩分量$\mathcal{F}$来定义力约束。注意，这里所说的*位置约束*是指位置约束或姿态约束，而*力约束*是指力约束或力矩约束。*自然约束*意指这些约束是在特定的接触条件下自然形成的，它们与期望的或预先规定的操作臂运动无关。

附加约束，又称为**人工约束**，是按照自然约束确定的期望运动或施加的力来定义的。即，每当用户给定了一个位置或力的期望轨迹，就定义一个人工约束。这些约束也会出现在广义约束表面的切向或法向，但是，与自然约束不同，人工力约束定义为沿表面的法向，人工位置约束定义为沿表面的切向，这样就保证了与自然约束的一致性。

图11-2所示为两种任务的自然约束和人工约束。注意，当给定自然位置约束在坐标系$\{C\}$中的特定自由度时，也应给定人工力约束，反之亦然。在任意瞬时，通过控制约束坐标系中的给定自由度以满足位置约束或力约束。

a) 摇手柄



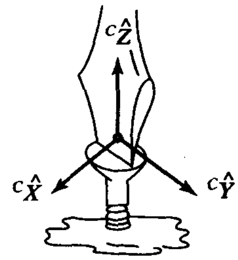
自然约束

$v_x = 0$　　$f_y = 0$
$v_z = 0$　　$n_z = 0$
$\omega_x = 0$
$\omega_y = 0$

人工约束

$v_y = r\alpha_1$　　$f_x = 0$
$\omega_z = \alpha_1$　　$f_z = 0$
$n_x = 0$
$n_y = 0$

b) 拧螺钉



自然约束

$v_x = 0$　　$f_y = 0$
$\omega_x = 0$　　$n_z = 0$
$\omega_y = 0$
$v_z = 0$

人工约束

$v_y = 0$　　$f_x = 0$
$\omega_z = \alpha_2$　　$n_x = 0$
$n_y = 0$
$f_z = \alpha_3$

图11-2　两种任务的自然约束和人工约束 320

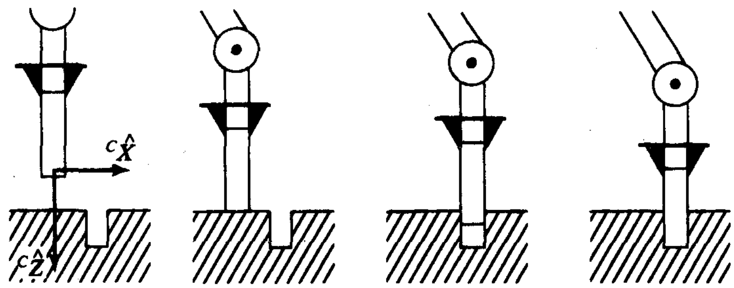
装配策略是指一个事先规划好的人工约束序列，并按照要求的方式完成这个作业。这种策略必须包含一些检测手段，使系统能够检测接触状态的变化，以便跟踪自然约束的变化。对于自然约束的每一个变化，从装配策略集中重新调用一个新的人工约束集，并由控制系统实施。为给定的装配任务自动选择约束的方法有待进一步研究。在本章中，为了确定自然约束，假设已对任务进行了分析，并且编程人员已经确定了一个控制操作臂的装配策略。

注意，在任务分析时通常忽略接触表面之间的摩擦力，这个假设仍能满足装配策略问题。事实上，许多种工况下的装配策略都是按这个假设制定的。通常选择位置控制的方向作为滑动摩擦力的作用方向，因此可将滑动摩擦力看作是位置伺服的扰动，并通过控制系统进行抑制。

例11.1

图11-3(a)~(d)所示为一个装配序列，用于将一个销钉插入一个圆孔中。销钉向下运动到孔左侧的表面，接着沿表面滑动直至进入孔中，然后插入销钉直到孔的底部，此时装配任务完成。将上述四个接触动作的每一个都定义为一个子任务。对于每一个子任务，给定自然约束

和人工约束。同时按照系统检测到的自然约束的变化进行操作。



(a) (b) (c) (d)

图11-3 销钉插入的四种接触动作序列

如图11-3(a)所示，首先将约束坐标系固连于销钉上。在图11-3(a)中，销钉位于自由空间，因此自然约束为

321

$$^{C}\mathcal{F}=0 \tag{11-1}$$

因此在这种情况下，人工约束构成了整个位置运动轨迹，使销钉沿 ${}^{C}\hat{Z}$ 方向接近表面。例如

$$^{C}v=\begin{bmatrix}0\\0\\v_{\text{approach}}\\0\\0\\0\end{bmatrix} \tag{11-2}$$

式中v_{approach}为接近表面的速度。

在图11-3(b)中，销钉已经达到表面。为检测销钉是否接触到了表面，需要检测 ${}^{C}\hat{Z}$ 方向的力。当所检测到的力超过了阈值，则认为销钉接触到了表面，这表明在新的接触情况下生成了一种新的自然约束集。假设接触情况如图11-3(b)所示，销钉在 ${}^{C}\hat{Z}$ 方向不能自由移动，也不能绕 ${}^{C}\hat{X}$ 或 ${}^{C}\hat{Y}$ 轴自由转动。在另外三个自由度方向，不能任意施加力，因此自然约束为

$$\begin{aligned}{}^{C}v_z&=0\\{}^{C}\omega_x&=0\\{}^{C}\omega_y&=0\\{}^{C}f_x&=0\\{}^{C}f_y&=0\\{}^{C}n_z&=0\end{aligned} \tag{11-3}$$

人工约束描述了这个滑移装配策略是在 ${}^{C}\hat{X}$ 方向沿表面的滑动，同时施加一个小的力来维持接触。因此有

$$
\begin{aligned}
{}^{C}v_x &= v_{\text{slide}} \\
{}^{C}v_y &= 0 \\
{}^{C}\omega_z &= 0 \\
{}^{C}f_z &= f_{\text{contact}} \\
{}^{C}n_x &= 0 \\
{}^{C}n_y &= 0
\end{aligned}
\tag{11-4}
$$

式中，f_{contact}为销钉滑移时作用于表面的法向力，v_{slide}为沿表面的滑移速度。

在图11-3(c)中，销钉已经慢慢进入孔中。这时检测 ${}^{C}\hat{Z}$ 方向的速度，待超过某一阈值（在理想情况下变为非零）。当检测到这种情况时，表明自然约束再次改变了，为此必须改变装配 322
策略（嵌入在人工约束中）。新的自然约束为

$$
\begin{aligned}
{}^{C}v_x &= 0 \\
{}^{C}v_y &= 0 \\
{}^{C}\omega_x &= 0 \\
{}^{C}\omega_y &= 0 \\
{}^{C}f_x &= 0 \\
{}^{C}n_z &= 0
\end{aligned}
\tag{11-5}
$$

我们选择的人工约束为

$$
\begin{aligned}
{}^{C}v_z &= v_{\text{insert}} \\
{}^{C}\omega_z &= 0 \\
{}^{C}f_x &= 0 \\
{}^{C}f_y &= 0 \\
{}^{C}n_x &= 0 \\
{}^{C}n_y &= 0
\end{aligned}
\tag{11-6}
$$

式中，v_{insert}为销钉向孔中插入的速度。最后，当 ${}^{C}\hat{Z}$ 方向的力超过某一阈值时，检测到的系统状态如图11-3(d)所示。

注意，大多数情况是通过检测位置或不受控制的力来检测自然约束的变化。例如，检测从图11-3(b)到图11-3(c)的变化，当控制 ${}^{C}\hat{Z}$ 方向的力时，可以检测 ${}^{C}\hat{Z}$ 方向的速度。为了发现何时销钉已经接触到孔的底部，虽然控制的是 ${}^{C}v_z$，而检测的却是 ${}^{C}f_z$。

我们已对坐标系做了一些简化。更为一般和严格的方法是将任务“分离”为位置控制和力控制两部分，可参见文献[19]。

确定更为复杂的零件的装配策略是相当复杂的。我们已经忽略了简化任务分析中不确定因素的影响。考虑不确定因素影响及实际应用的自动规划系统的开发已成为一个研究课题[4~8]。

若想对这些方法进行更详细地了解，请参阅文献[9]。

11.4 力/位混合控制问题

图11-4所示为接触状态的两个极端情况。在图11-4(a)中，操作臂在自由空间移动。在这
323 种情况下，自然约束都是力约束——没有相互作用力，因此所有的约束力都为零⊖。具有6自由度的操作臂可以在6个自由度方向上运动，但是不能在任何方向上施加力。图11-4（b）所示为操作臂末端执行器紧贴墙面运动的极端情况。在这种情况下，因为操作臂不能自由改变位置，所以它有6个自然位置约束。然而，操作臂可以在这6个自由度上对目标自由施加力和力矩。

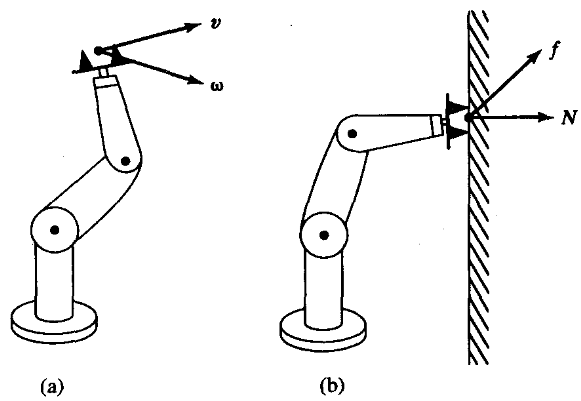


图11-4 接触状态的两个极端情况。左边的操作臂在自由空间中运动，不与墙面接触右边的操作臂贴紧墙面，不存在自由运动

在第9章和第10章中研究了应用于图11-4(a)所示情况的位置控制问题。图11-4(b)中的情况在实际中并不经常出现，多数情况是需要在部分约束任务环境中进行力控制，即对系统的某些自由度需要进行位置控制，而对另一些自由度需要进行力控制。这样，在本章中我们主要讨论力/位混合控制方法。

对于力/位混合控制器必须解决以下三个问题：

1. 沿有自然力约束的方向进行操作臂的位置控制。
2. 沿有自然位置约束的方向进行操作臂的力控制。
3. 沿任意坐标系$\{C\}$的正交自由度方向进行任意位置和力的混合控制。

11.5 质量-弹簧系统的力控制

在第9章中，我们从非常简单的单一质量块控制问题开始研究位置控制问题。在第10章，
324 我们将这种方法应用于一个操作臂模型，即控制整个操作臂的问题等价于控制n个独立的集中质量（对于具有n个关节的操作臂来说）。同样，通过控制施加到简单的单一自由度系统的力来研究力控制。

⊖ 切记，我们这里关心的是末端执行器和环境之间的接触力，而非内力。

考虑存在接触力的情况，我们必须建立某种环境作用模型。为了建立这个概念，使用一种非常简单的被控物体和环境之间的相互作用模型。将与环境接触的模型看作是一个弹簧——即假设系统是刚性的，而环境具有刚度k_e。

考虑图11-5所示的质量—弹簧系统的控制问题。同时将未知干扰力f_{dist}考虑在内，它可能是未知模型的摩擦力，即操作臂传动齿轮的啮合损耗。要控制的变量为作用于环境的力f_e，它是施加在弹簧上的力:

$$f_e = k_e x \tag{11-7}$$

描述这个物理系统的方程为

$$f = m\ddot{x} + k_e x + f_{dist} \tag{11-8}$$

或者写成需要控制的变量f_e的形式

$$f = mk_e^{-1}\ddot{f}_e + f_e + f_{dist} \tag{11-9}$$

采用控制器分解方法，取

$$\alpha = mk_e^{-1}$$

和

$$\beta = f_e + f_{dist}$$

得到控制律

$$f = mk_e^{-1}(\ddot{f}_d + k_{vf}\dot{e}_f + k_{pf}e_f) + f_e + f_{dist} \tag{11-10}$$

式中$e_f = f_d - f_e$为期望力f_d与检测到的作用在环境上的力f_e之间的误差。如果能计算式（11-10），则可以得到如下的闭环系统

$$\ddot{e}_f + k_{vf}\dot{e}_f + k_{pf}e_f = 0 \tag{11-11}$$

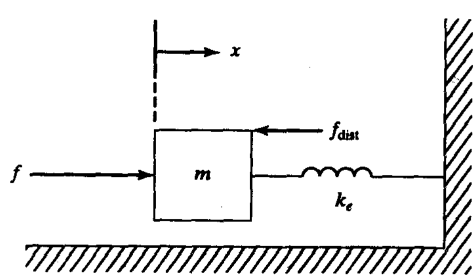


图11-5 弹簧－质量系统 325

然而，在控制律中f_{dist}是未知的，因此式（11-10）不可解。我们可以在控制律中舍去这一项，但是由稳态分析表明，还有更好的解决方法，尤其是当环境刚性k_e很高时（通常情况下）。

如果选择在控制律中舍去f_{dist}这一项，则令式（11-9）与式（11-10）相等，并且在稳态分析中令对时间的各阶导数为零，可得

$$e_f = \frac{f_{dist}}{\alpha} \tag{11-12}$$

式中，$\alpha = mk_e^{-1}k_{pf}$ 为有效力反馈增益。然而，在式（11-10）中用f_d代替f_d+f_{dist}，则稳态误差为

$$e_f = \frac{f_{\text{dist}}}{1+\alpha} \tag{11-13}$$

一般情况下，环境是刚性的，α可能很小，因此由式（11-13）计算稳态误差远优于式（11-12）。因此，推荐控制律如下

$$f = mk_e^{-1}\left(\ddot{f}_d + k_{vf}\dot{e}_f + k_{pf}e_f\right) + f_d \tag{11-14}$$

图11-6为采用控制律（11-14）的闭环系统示意图。

通常，对于力伺服控制来说，实际情况与图11-6中描述的理想情况有些不同。首先，力轨迹通常为常数——即通常希望将接触力控制为某一常数值，而很少把它设置为任意的时间函数。因此，控制系统的输入 $\dot{f}_d$ 和 $\ddot{f}_d$ 通常恒设为零。另一种实际情况是检测到的力"噪声"很大，因此用数值微分计算 $\dot{f}_e$ 是不可行的。然而，$f_e=k_e x$，因此可以求作用于环境上的力的微分 $\dot{f}_e = k_e\dot{x}$ 。这样做非常实际，因为大多数操作臂都可以测量速度，技术是成熟的。做出这两个实际选择之后，可以将控制律写为

$$f = m\left(k_{pf}k_e^{-1}e_f - k_{vf}\dot{x}\right) + f_d \tag{11-15}$$

对应的原理图如图11-7所示。

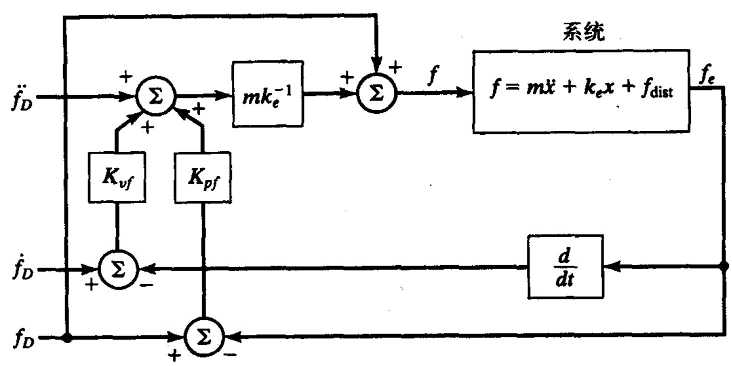


图11-6 弹簧－质量系统的力控制系统

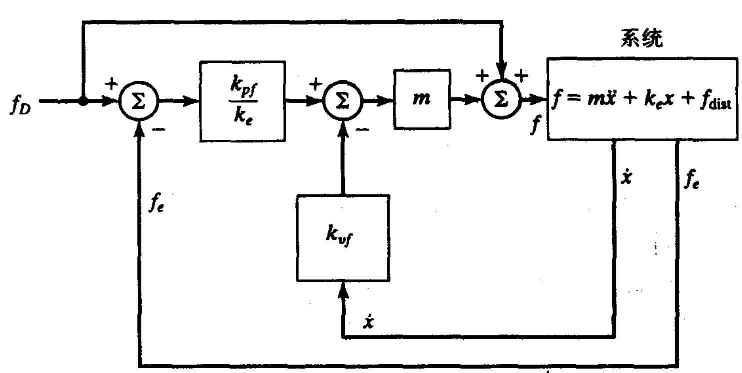


图11-7 实际的弹簧－质量系统的力控制系统

注意，图11-7所示系统表明，对于具有增益k_{vf}的内部速度环，力误差生成了一个点集。某些力控制律也包含积分项，以提高系统的稳态性能。

最后一个重要问题就是控制律中的环境刚度k_e常是未知的和时变的。然而，由于装配机器人经常装配刚性零件，因此，可以认为k_e很大。通常进行这种假设，并选择增益，以便相对k_e的变化系统是鲁棒的。

构造控制接触力的控制律，目的是提出一个假设结构，并从中发现一些问题。本章的最后，我们将简单假设这样的力控制伺服系统是成立的，并将其抽象为如图11-8所示的黑箱。实际上，建立一个高性能的力伺服系统是不容易的，目前这是一个非常活跃的研究领域[11-14]。326~327
有关这方面的详细介绍，请参阅文献[15]。

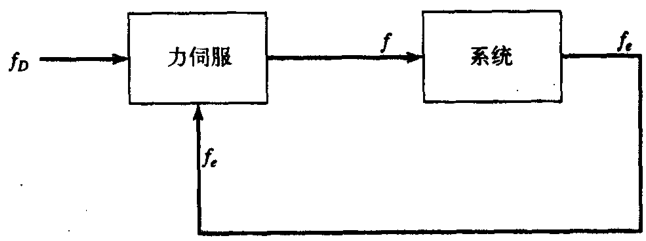


图11-8 黑箱形式的力控制伺服系统

11.6 力/位混合控制方法

在本节中，介绍力/位混合控制器的控制系统结构。

坐标系{C}中的笛卡儿操作臂

首先考虑具有移动关节的3自由度操作臂的简单情况，关节轴线沿$\hat{Z}$、$\hat{Y}$和$\hat{X}$方向。为简单起见，假设每一连杆的质量为m，滑动摩擦力为零。假设关节运动方向与约束坐标系{C}的轴线方向完全一致。末端执行器与刚性为k_e的表面接触，${}^C\hat{Y}$垂直于接触表面。因此，在该方向需要力控制，而在${}^C\hat{X}$、${}^C\hat{Z}$方向进行位置控制（见图11-9）。

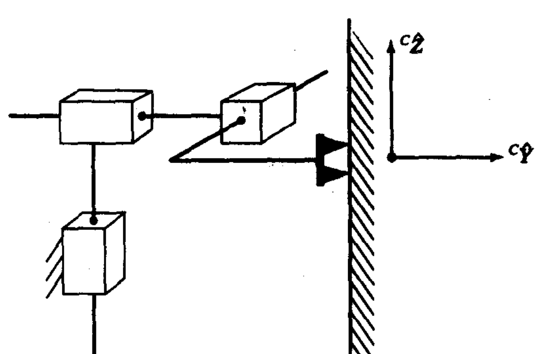


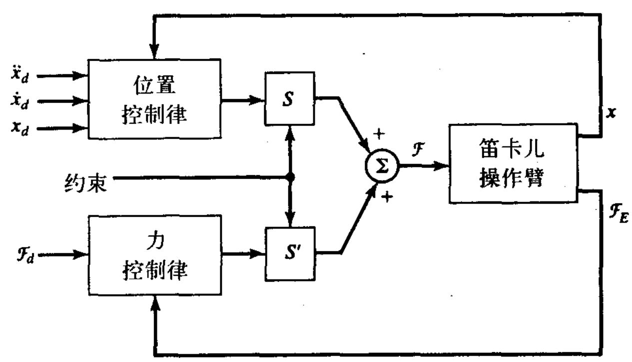
图11-9 与表面接触的3自由度笛卡儿操作臂

在这种情况下，力/位混合控制问题的解比较清楚。我们使用第9章中提出的单位质量位置控制器来控制关节1和3。关节2（作用于$\hat{Y}$方向）应使用11.4节中介绍的力控制器进行控制。

于是可以在 ${}^{C}\hat{X}$ 、 ${}^{C}\hat{Z}$ 方向设定位置轨迹，同时在 ${}^{C}\hat{Y}$ 方向独立设定力轨迹（可能只是一个常数）。

如果希望将约束表面的法线方向转变为沿 $\hat{X}$ 向或 $\hat{Z}$ 向，则可以按如下方法对笛卡儿操作臂控制系统稍加扩展：构建这个控制器，使它可以确定3个自由度的全部位置轨迹，同时也可以确定3个自由度的力轨迹。当然，不能同时满足这6个约束的控制——因而，需要设定一些工作模式来指明在任一给定时刻应控制哪条轨迹的哪个分量。

在图11-10所示的控制器中，用一个位置控制器和一个力控制器，控制简单笛卡儿操作臂的3个关节。引入矩阵S和S'来确定应采用哪种控制模式——位置或力——去控制笛卡儿操作臂的每一个关节。S矩阵为对角阵，对角线上的元素为1和0。对于位置控制，S中元素为1的位置在S'中对应的元素为0；对于力控制，S中元素为0的位置在S'中对应的元素为1。因此，矩阵S和S'相当于一个互锁开关，用于设定$\{C\}$中每一个自由度的控制模式。按照S的规定，系统中总有3个轨迹分量受到控制，而位置控制和力控制之间的组合是任意的。另外3个期望轨迹分量和相应的伺服误差应被忽略。也就是说，当一个给定的自由度受到力控制时，那么这个自由度上的位置误差就应该被忽略。



328
~
329

图11-10 3自由度笛卡儿操作臂的混合控制器

例11.2

如图11-9中所示，${}^{C}\hat{Y}$ 方向的运动受到作用表面的约束，求矩阵S和S'。

由于 $\hat{X}$ 和 $\hat{Y}$ 方向的分量受到位置控制，所以在矩阵S对角线上对应于这两个分量的位置上输入1。在这两个方向上具有位置伺服，可以跟踪输入轨迹。$\hat{Y}$ 方向输入的任何位置轨迹将被忽略。矩阵S'对角线方向上的0和1元素与矩阵S相反。因此，有

$$S=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$
$$S'=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix} \tag{11-16}$$

■

图11-10所示的混合控制器是关节轴线与约束坐标系{C}完全一致的特殊情况。在下一小节中，我们将前面章节研究的方法推广到一般操作臂的控制器中，且对于任意的{C}都适用。然而，在理想情况下，操作臂好像有一个与{C}中的每一自由度都一致的驱动器。

一般操作臂的控制

将图11-10所示的混合控制器推广到一般操作臂，以便可以直接应用基于笛卡儿坐标系的控制方法。第6章讨论了如何根据末端执行器的笛卡儿运动写出操作臂的运动方程，第10章给出了如何对操作臂应用数学方法进行解耦的笛卡儿位置控制。这个基本思想是通过使用笛卡儿空间的动力学模型，把实际操作臂的组合系统和计算模型变换为一系列独立的、解耦的单位质量系统。一旦完成解耦和线性化，我们就可以应用11.4节中介绍的简单伺服方法。

图11-11所示为在笛卡儿空间中基于操作臂动力学公式的计算方法，使操作臂呈现为一系列解耦的单位质量系统。为了用于混合控制方案，笛卡儿动力学方程和雅可比矩阵都应在约束坐标系{C}中描述。同样，运动学方程也应相对于约束坐标系{C}进行计算。

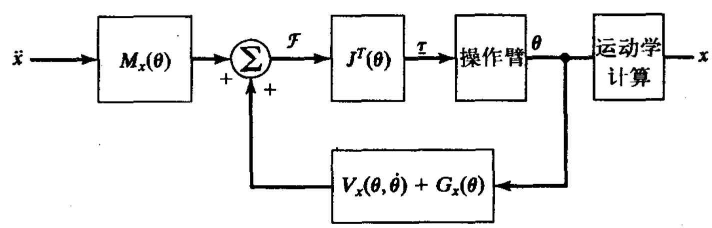


图11-11 第10章中介绍的笛卡儿解耦方案

由于已经设计了与约束坐标系一致的笛卡儿操作臂的混合控制器，并且因为用笛卡儿解耦方法建立的系统具有相同的输入-输出特性，因此只需要将这两个条件结合，就可以生成一般的力/位混合控制器。

图11-12是一个一般操作臂的混合控制器框图。注意，动力学方程以及雅可比矩阵均在约束坐标系中描述。

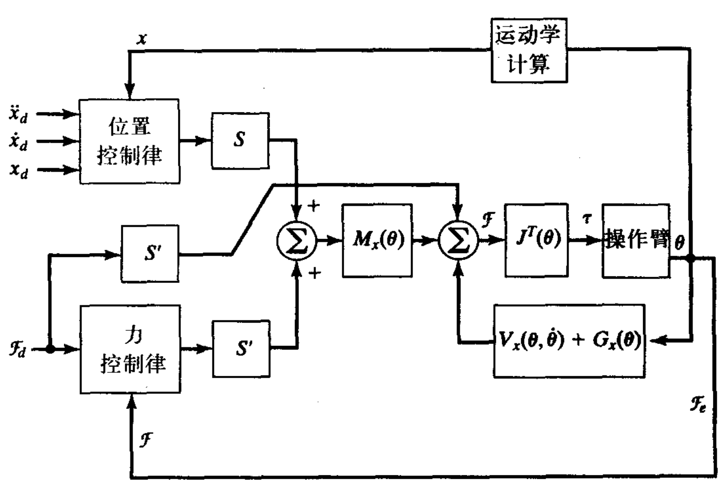


图11-12 一般操作臂的力/位混合控制器。为简单起见，没有表示出速度反馈环

描述运动学方程时应将坐标变换到约束坐标系，同样，检测的力也要变换到约束坐标系
330~331 {C}中。伺服误差应在{C}中计算，{C}中的控制模型通过适当选择$S^{\ominus}$来设定。图11-13所示为受上述系统控制的操作臂。

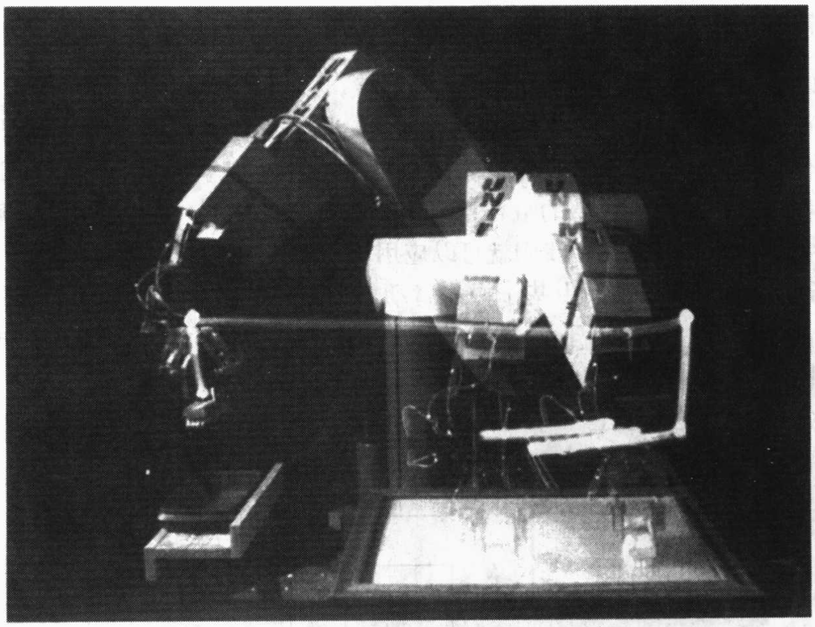


图11-13 Standford大学的O.Khatib开发的由COMOS系统控制的PUMA560擦窗操作臂。这些实验使用力觉手指和类似于图11-12[10]的控制结构

附加可变刚度

对一个自由度进行严格的位置或力控制是在伺服刚度频谱的高端和低端进行的。理想的位置伺服刚度为无穷大，可抑制所有作用于系统的干扰力。相反，理想的力伺服刚度为零，可保持期望的作用力，不受位置变化的干扰。应用中常控制末端执行器的特性为有限刚度而不是零或无穷大。总之，是希望控制末端执行器的**机械阻抗**[14, 16, 17]。

在接触力的分析中，我们已经假设环境的刚度很大。当与刚性环境接触时，可使用零刚度力控制。当与零刚度环境接触时（在自由空间运动），可使用高刚度位置控制。因此，控制末端执行器的刚度，可近似用控制局部环境的刚度代替，这可能是一个较好的方法。因此，在操作塑性零件或弹性零件时，希望设定伺服刚度为有限值而不是零或无穷大。

在混合控制器中，可以简单地采用位置控制以及降低{C}中相应自由度的位置增益进行控制。通常，如果这样做，还应降低相应的速度增益，使这个自由度保持在临界阻尼状态。在
332 {C}中这个自由度的位置伺服，应具有改变位置增益和速度增益的能力，使力/位混合控制器对于末端执行器产生一个广义的机械阻抗[17]。然而，在许多实际情况中，遇到的都是刚性零件间的相互作用问题，因此要求进行纯粹的位置控制或纯粹的力控制。

⊖ 在文献[10]中已将本章中介绍的基本方法推广到沿相关任务方向的分解运动控制模型中。

11.7 当前的工业机器人控制方法

目前，真正的力控制（例如本章中介绍的力/位混合控制器）并未应用在工业机器人中。这是因为，在实际应用中还存在许多问题，如需要进行大量的计算、缺少动力学模型的精确参数、缺少可靠耐用的力传感器以及用户在确定力/位控制方法时出现的困难和负担。

被动柔顺性

一个刚度很高的操作臂，同时具有很高的位置伺服刚度，那么它并不适用于完成零件相互接触并产生接触力的任务。因为在这种情况下，零件常会被卡住或破坏。从早期将操作臂用于装配的实验开始，人们就开始认识到，机器人有时可以执行这样的操作，那是由于零件、夹具或操作臂自身存在一定的柔性。一般情况下，系统的一个或多个部件存在一定的“柔性”，使得机器人的装配操作能够成功。

据此，可以在系统设计时专门设计一种柔顺装置。这种装置最成功的例子是Draper 实验室开发的RCC，即*微偏心柔顺装置*[18]。RCC被巧妙地设计用来获得一种“合适”的柔顺性，可以保证平滑、迅速地完成某些装配任务而不发生或很少发生卡住的现象。RCC实际上是一个具有6自由度的弹簧，它安装在操作臂的腕部和末端执行器之间。通过调节6个弹簧的刚度，可以获得大小不同的柔顺性。这种方法称作**被动柔顺**方法，并被用于某些工业机器人的操作任务中。

通过降低位置增益实现的柔顺性

另一种方法可以代替被动柔顺方法，这种方法通过调节位置控制系统的增益来改变操作臂的总体刚度。一些工业机器人采用了这种方法，例如磨削加工。磨削时需要保持表面接触，但却不需要精确的力控制。

索尔兹伯里[16]提出了一种独特有趣的方法。他的方法是在基于关节的伺服系统中，通过改变位置增益使末端执行器沿笛卡儿自由度方向具有一定的刚度。考虑一个普通的具有6自由度的弹簧，它的作用力可以描述为

$$\mathcal{F} = K_{px}\,\delta\chi \tag{11-17}$$ 333

式K_{px} 中是一个6 × 6的对角阵，对角线上前3个元素是移动刚度，后3个元素是转动刚度。如何使操作臂的末端执行器表现出这种刚度特性呢？

根据操作臂雅可比矩阵的定义，有

$$\delta\chi = J(\Theta)\delta\Theta \tag{11-18}$$

结合式（11-17）得到

$$\mathcal{F} = K_{px}\,J(\Theta)\delta\Theta \tag{11-19}$$

根据静力平衡原理，有

$$\tau = J^T(\Theta)\,\mathcal{F} \tag{11-20}$$

联立式（11-19）得到

$$\tau = J^T(\Theta)K_{px}J(\Theta)\delta\Theta \tag{11-21}$$

这里，雅可比矩阵通常在工具坐标系中写出。方程（11-21）表示关节力矩是关节角微小变化$\delta\Theta$的函数，使得操作臂末端执行器像一个6自由度笛卡儿弹簧一样。

一个简单的基于关节的位置控制器可以使用如下控制律

$$\tau = K_p E + K_v \dot{E} \tag{11-22}$$

式中K_p和K_v是常量对角增益矩阵，E为由$\Theta_d - \Theta$定义的伺服误差。索尔兹伯里建议使用下式

$$\tau = J^T(\Theta) K_{px} J(\Theta) E + K_v \dot{E} \tag{11-23}$$

式中K_{px}为笛卡儿空间中末端执行器的期望刚度。对于一个具有6自由度的操作臂，K_{px}是一个对角矩阵，对角线上的元素分别表示末端执行器的3个移动刚度和3个旋转刚度。实际上，通过使用雅可比矩阵，可以将笛卡儿刚度变换为关节空间刚度。

力觉

力觉使操作臂能够检测到与表面的接触，并使用力检测来完成某些动作。例如，**运动监控**有时用来表示这种控制策略：在检测到力以前，以位置控制方式运动，检测到力之后，停止运动。此外，力觉还可以用于检测操作臂举起物体的重量，例如可采用在零件抓持操作中的简单检测确保抓住零件或抓住正确的零件。

某些产品化的机器人开始在末端执行器上配备力传感器，这些机器人可以通过编程使操
334 作力超过阈值时停止运动或执行其他运动，有些机器人可以通过编程检测末端执行器抓取物体的重量。

参考文献

[1] M. Mason, "Compliance and Force Control for Computer Controlled Manipulators," M.S. Thesis, MIT AI Laboratory, May 1978.

[2] J. Craig and M. Raibert, "A Systematic Method for Hybrid Position/Force Control of a Manipulator," *Proceedings of the 1979 IEEE Computer Software Applications Conference*, Chicago, November 1979.

[3] M. Raibert and J. Craig, "Hybrid Position/Force Control of Manipulators," *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, June 1981.

[4] T. Lozano-Perez, M. Mason, and R. Taylor, "Automatic Synthesis of Fine-Motion Strategies for Robots," 1st International Symposium of Robotics Research, Bretton Woods, NH, August 1983.

[5] M. Mason, "Automatic Planning of Fine Motions: Correctness and Completeness," IEEE International Conference on Robotics, Atlanta, March 1984.

[6] M. Erdmann, "Using Backprojections for the Fine Motion Planning with Uncertainty," *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 5, No. 1, 1986.

[7] S. Buckley, "Planning and Teaching Compliant Motion Strategies," Ph.D. Dissertation, Department of Electrical Engineering and Computer Science, MIT, January 1986.

[8] B. Donald, "Error Detection and Recovery for Robot Motion Planning with Uncertainty," Ph.D. Dissertation, Department of Electrical Engineering and Computer Science, MIT, July 1987.

[9] J.C. Latombe, "Motion Planning with Uncertainty: On the Preimage Backchaining Approach," in *The Robotics Review*, O. Khatib, J. Craig, and T. Lozano-Perez,

Editors, MIT Press, Cambridge, MA, 1988.

[10] O. Khatib, "A Unified Approach for Motion and Force Control of Robot Manipulators: The Operational Space Formulation," *IEEE Journal of Robotics and Automation*, Vol. RA-3, No. 1, 1987.

[11] D. Whitney, "Force Feedback Control of Manipulator Fine Motions," Proceedings Joint Automatic Control Conference, San Francisco, 1976.

[12] S. Eppinger and W. Seering, "Understanding Bandwidth Limitations in Robot Force Control," *Proceedings of the IEEE Conference on Robotics and Automation*, Raleigh, NC, 1987.

[13] W. Townsend and J.K. Salisbury, "The Effect of Coulomb Friction and Stiction on Force Control," *Proceedings of the IEEE Conference on Robotics and Automation*, Raleigh, NC, 1987.

[14] N. Hogan, "Stable Execution of Contact Tasks Using Impedance Control," *Proceedings of the IEEE Conference on Robotics and Automation*, Raleigh, NC, 1987.

[15] N. Hogan and E. Colgate, "Stability Problems in Contact Tasks," in *The Robotics Review*, O. Khatib, J. Craig, and T. Lozano-Perez, Editors, MIT Press, Cambridge, MA, 1988.

[16] J.K. Salisbury, "Active Stiffness Control of a Manipulator in Cartesian Coordinates," 19th IEEE Conference on Decision and Control, December 1980. 335

[17] J.K. Salisbury and J. Craig, "Articulated Hands: Force Control and Kinematic Issues," *International Journal of Robotics Research*, Vol. 1, No. 1.

[18] S. Drake, "Using Compliance in Lieu of Sensory Feedback for Automatic Assembly," Ph.D. Thesis, Mechanical Engineering Department, MIT, September 1977.

[19] R. Featherstone, S.S. Thiebaut, and O. Khatib, "A General Contact Model for Dynamically-Decoupled Force/Motion Control," *Proceedings of the IEEE Conference on Robotics and Automation*, Detroit, 1999.

习题

11.1 [12]将方形截面的销钉插入一个方孔中，给出自然约束表达式。用简图表示约束坐标系$\{C\}$的定义。

11.2 [10]给出习题11.1中使方形销钉插入孔中而不被卡住的人工约束（即，轨迹）。

11.3 [20]将式（11-14）表示的控制律用于式（11-9）给出的系统中，证明可以得出如下误差空间方程

$$\ddot{e}_f + k_{vf}\dot{e}_f + (k_{pf} + m^{-1}k_e)e_f = m^{-1}k_e f_{\text{dist}}$$

并且仅当环境刚度k_e已知时，才能选择增益，使系统达到临界阻尼状态。

11.4 [17]已知

$$^A_BT = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.500 & 0.000 & 10.0 \\ 0.500 & 0.866 & 0.000 & 0.0 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 & 5.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

如果坐标系$\{A\}$原点处的力-力矩矢量为

$$^{A}\mathcal{V}=\begin{bmatrix}0.0\\2.0\\-3.0\\0.0\\0.0\\4.0\end{bmatrix}$$

求以坐标系{B}原点为参考点的6 × 1力-力矩矢量。

11.5 [17] 已知

$$^{A}_{B}T=\begin{bmatrix}0.866 & 0.500 & 0.000 & 10.0\\-0.500 & 0.866 & 0.000 & 0.0\\0.000 & 0.000 & 1.000 & 5.0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

如果坐标系{A}原点处的力-力矩矢量为

$$^{A}\mathcal{V}=\begin{bmatrix}6.0\\6.0\\0.0\\5.0\\0.0\\0.0\end{bmatrix}$$

336 求以坐标系{B}原点为参考点的6 × 1力-力矩矢量。

11.6 [18]用英语描述如何在拥挤的书架上将一本书插到书间的狭缝中。

11.7 [20]给出用操作臂关闭铰链门这一任务的自然约束和人工约束。可以做出必要的合理假设。用简图表示{C}的定义。

11.8 [20] 给出用操作臂拔掉香槟瓶塞这一任务的自然约束和人工约束。可以做出必要的合理假设。用简图表示{C}的定义。

11.9 [41]对于11.7节中的刚性伺服系统，我们没有说明这个系统是稳定的。假设将式（11-23）作为解耦和线性化操作臂（n个关节可以看作为单位质量）的伺服控制部分。证明对于任何负定矩阵K_v，这个控制器都是稳定的。

11.10 [48]对于11.7节中的刚性伺服系统，我们没有说明这个系统处于临界阻尼状态。假设将式（11-23）作为解耦和线性化操作臂（n个关节可以看作为单位质量）的伺服控制部分。是否可以设计一个K_p，它是Θ的函数，并使系统在所有位形下处于临界阻尼状态？

11.11 [15]如图11-14所示，一个质量块受到地板和墙面的约束。假设该接触状态在整个时间间隔上不变，给出这种情况下的自然约束。

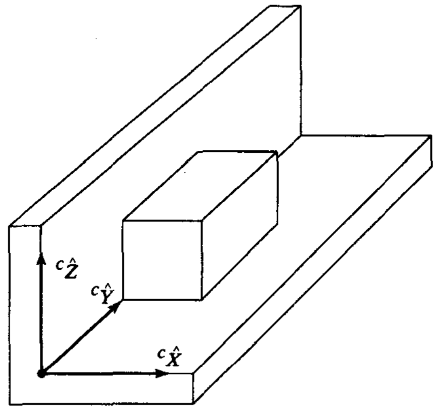


图11-14 受到地板和墙面约束的质量块

编程习题

对于三关节平面操作臂，使用控制律（11-23）控制模拟操作臂，建立一个笛卡儿刚度控制。使用坐标系{3}中描述的雅可比矩阵。

操作臂的位置为Θ=[60.0 −90.0 30.0]，并且K_{px}具有如下形式

$$K_{px}=\begin{bmatrix} k_{\text{small}} & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & k_{\text{big}} & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & k_{\text{big}} \end{bmatrix}$$ 337

对系统在下述静态力的情况下进行仿真:

1. 作用在坐标系{3}原点的 $\hat{X}_3$ 方向的力为1N;

2. 作用在坐标系{3}原点的 $\hat{Y}_3$ 方向的力为1N。

通过实验求k_{small}和k_{big}的值，将k_{big}作为 $\hat{Y}_3$ 方向的高刚度，将k_{small}作为 $\hat{X}_3$ 方向的低刚度。在这两种情况下，系统的稳态偏差是多少? 338

第12章　机器人编程语言及编程系统

12.1　概述

这一章，我们开始讨论用户和工业机器人之间的接口。依靠这种接口，用户便可利用我们在以前章节已经学过的所有基本机构原理和控制算法。

像操作臂以及其他可编程自动化装备一样，这种复杂的用户接口随着越来越多的工业应用变得愈加重要，因此用户接口的性能越来越受到关注。实际上，这些问题逐渐成为工业机器人设计和应用中的核心问题。

机器人操作臂与专用的自动化装备的区别在于它们的“柔性”，即可编程性。不仅操作臂的运动可编程，而且通过使用传感器以及与其他工厂自动化装备的通讯，操作臂能够适应任务进程中的各种变化。

在研究操作臂编程方法时，重要的是要记住它们只是一个自动化过程的一小部分。习惯上用**工作单元**描述装备的一个局部集合，这种局部集合包括一个或者更多的操作臂、输送系统、零件给料器和夹具。在更高的级别中，各工作单元可以在工厂网络内被相互连接，从而用一台中央控制计算机便能够控制工厂的全部流程。因此，对于自动化工厂的工作单元，在各种互联机器的编程问题中，经常需要研究的是操作臂的编程问题。

与前面11章的内容不同，这一章的内容（以及下一章）具有不断变化更新的特点，因此难以进行具体介绍。相反，我们仅试图提出相关的基本概念，随着工业科技的持续发展，让
339 读者自己去寻找最新的应用实例。

12.2　机器人编程的三个级别

已经有许多种类型的用于机器人编程的用户接口被开发出来。当微机在工业中迅速普及之前，机器人控制器类似于常用于控制专用自动化装备的简单顺序控制器。现代方法主要体现在计算机编程上，可编程机器人的要点包括了所有面向一般计算机编程的要点，甚至更多。

示教

早期的机器人都是通过一种我们称之为**示教**的方法进行编程的，这种方法包括，移动机器人到一个期望目标点，并在存贮器中将这个位置记录下来，使得顺序控制器可以在再现时读取这个位置。在示教阶段，用户通过手或者通过**示教盒**交互方式来操纵机器人。示教盒是手持的按钮盒，它可以控制每一个操作臂关节或者每一个笛卡儿自由度。这种控制器可以进行调试和分步执行，因此，能够输入包含逻辑功能的简单程序。一些示教盒带有字符显示，并且在性能上接近复杂的手持终端。图12-1所示为一个操作者正在使用一个示教盒对一台大型工业机器人进行编程。

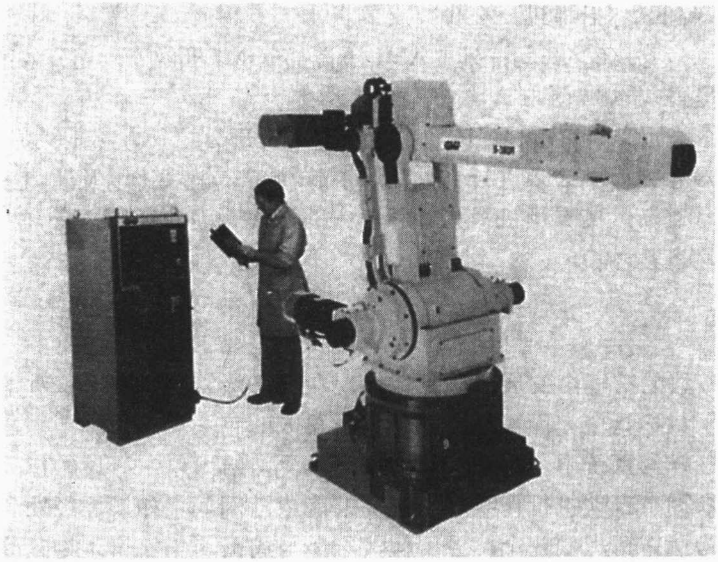


图12-1 GMF S380常用于汽车车身的点焊。图中，操作者使用示教盒对操作臂编程。GMFanuc公司授权图片

340

动作级机器人编程语言

自从廉价且功能强大的计算机出现以来，这种通过计算机语言编写程序的可编程机器人日益成为主流。通常，这些计算机编程语言的特征是可应用于各种可编程操作臂的问题，因此称为**机器人编程语言**（RPLs）。大多数机器人系统配备了机器人编程语言，但同时也保留了示教盒接口。

机器人编程语言已有多种形式。我们将其区分为三种类型：

1. **专用操作语言**。这类机器人编程语言是随着一种全新的语言开发出来的，虽然这类语言专门用于机器人领域，但有可能成为一种通用的计算机编程语言。例如Unimation公司[1]开发的用来控制工业机器人的VAL语言。VAL语言是专门作为一种操作臂控制语言开发的，而作为一种通用的计算机语言，它的功能是相当弱的。例如，它不支持浮点型数据或字符串，并且子程序不能传递函数。一个最新的版本V-II能够支持上述这些功能[2]。这种语言的当前形式是V+，它包括了许多新的功能[13]。Stanford大学开发的AL语言也是专用操作语言的一个例子[3]。尽管AL编程语言现在已经过时了，但是有些功能在当前的许多语言中仍然不具备（如力控制、并联机构）。因为AL语言是在学校环境中开发出来的，因此有许多参考书介绍了这种语言[3]。由于上述原因，我们在讨论中仍将继续参考这种语言。

2. **应用已有计算机语言的机器人程序库**。这种机器人编程语言的开发始于一种流行的计算机语言（例如Pascal语言），并且附加了一个机器人专用的子程序库。这样，用户只要写一段Pascal程序就可以根据机器人的专门要求频繁地访问预定义的子程序包。美国Cimflex公司的AR-BASIC语言便是这样一个例子[4]，实际上它是一个标准BASIC应用程序的子程序库。由NASA的喷气机推进实验室开发的JARS语言便是这样一种基于Pascal语言的机器人编程语言[5]。

3. **应用新型通用语言的机器人程序库**。这种机器人编程语言的开发是以一种新型的通用

语言作为编程的基础，然后提供一个预定义的机器人专用的子程序库。由ABB机器人公司开发的RAPID语言[6]，以及IBM公司开发的AML语言[7]和GMF机器人公司开发的KAREL语言[8]都是这种机器人编程语言的例子。

对机器人工作单元实际应用程序的研究表明，绝大部分语句并不是机器人所特有的[7]，相
341 反，在大多数机器人编程中必须进行初始化、逻辑测试、模块化以及通讯等。因此，机器人语言的发展趋势是逐渐远离专用机器人编程语言的开发，而向通用语言开发的方向发展，例如上述的第2类和第3类语言。

任务级编程语言

机器人编程方法的第三个发展阶段具体体现在**任务级编程语言**。这种语言允许用户直接给定期望任务的子目标指令，而不是详细指定机器人的每一个动作细节。与动作级机器人编程语言相比，在这样的系统中，用户能够在更高水平上给出应用程序的指令。一个任务级机器人编程系统必须拥有自动执行许多任务规划的能力。例如，如果已经发出“抓住螺钉”的指令，系统必须为操作臂规划一个路径，使其避免与周围的任何障碍物碰撞，且必须在螺钉上自动选择合适的抓取位置，且必须抓住螺钉。相反，对于动作级机器人编程语言来说，所有的这些选择都需要编程者来完成。

动作级机器人编程语言与任务级别编程语言之间的区别是非常显著的。虽然对动作级机器人编程语言的不断改善有助于使编程简化，但是不能认为这些改进是一个任务级编程系统的组成部分。至今还没有真正的操作臂任务级编程语言，但是它已经成为当今一个活跃的研究课题[9, 10]，并在不断的研究中。

12.3 应用实例

图12-2所示为一个自动装配工作单元，在一个虚拟的制造过程中完成一个子装配过程。这个工作单元由下述各部分组成：一台在计算机控制下的输送零件的输送机；一部用于给输送机上的零件定位、且与视觉系统连接的摄像机；一台配备有腕力传感器的工业机器人（图中为PUMA560）；一部位于工作台表面的给操作臂提供零件的给料器；一台计算机控制的压力机，它能够由机器人加载和卸载；一个位于机器人上的盛放成品的货盘。

整个过程在操作臂控制器的控制之下依次进行：

1. 给输送机一个启动信号，当视觉系统报告探测到输送机上的托盘时，输送机停止运动。

2. 视觉系统判断托盘在输送机上的位置和姿态，并且对托盘进行检测，例如错误的打孔号码。

3. 根据视觉系统的输出，操作臂用给定的力抓住托盘。检测指端之间的距离，确保托盘已经被完全抓住。否则，机器人移出装配线，并且重复执行视觉系统的任务。

4. 将托盘置于工作表面的一个定位装置上。在这个位置，输送机能够获取下一个托盘的
342 启动信号，即第1步和第2步能够与下列步骤同时开始。

5. 从给料器中抓取一个销钉，部分插入托盘上一个锥形孔内。力控制用于执行这个插入操作，并简单检查这个操作的完成情况（如果销钉给料器是空的，将会通知操作者，并且操作臂一直等到操作者重新发出指令再工作）。

6. 机器人抓住装配在一起的托盘和销钉，并放入压力机。

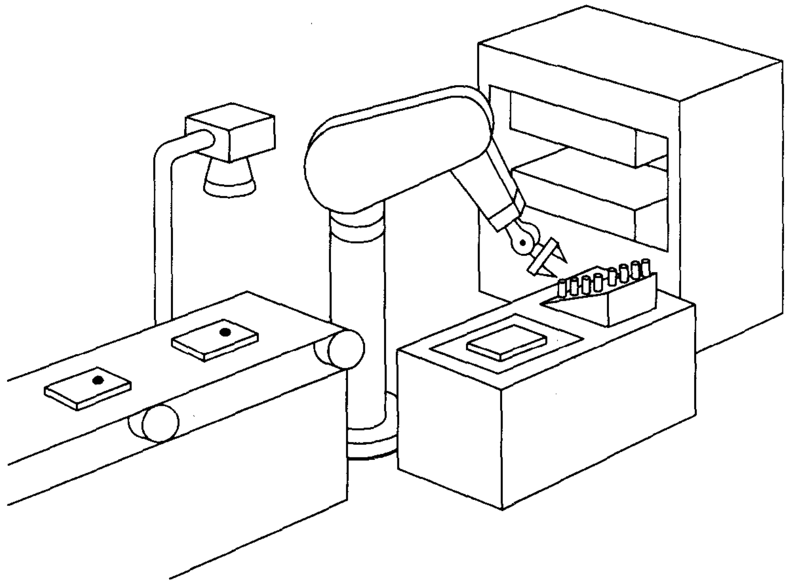


图12-2 一个含有工业机器人的自动装配工作单元

7. 压力机得到指令起动，将销钉压入托盘，直到压实。给出加压信号完成，托盘被放回刚才的定位装置上进行最终检测。

8. 通过力传感器检测销钉插入的情况是否适当。操作臂检测作用于销钉侧向的反力，并且能够通过几种检测方法检测到销钉在托盘上的突出量。

9. 如果判断装配过程正常，机器人便将成品零件放入旁边等待的货盘中。如果货盘已满，会向操作者发出信号。如果装配不符合要求，托盘则落入废品箱内。

10. 一旦第2步（在并行操作中较早开始的）完成，转至第3步。

这是当前工业机器人执行任务的一个例子。应该知道，想通过“示教”方法来完成这个过程是不可行的。例如，在货盘的操作中，如果必须去示教所有的货盘间隔位置是非常费事的。比较可行的方法是只示教一个角点位置，然后根据货盘尺寸计算出其他位置。此外，通过交互过程中的信号指令以及通过使用一般的示教盒或菜单界面去设定并行作业的指令，通常是根本不可能的。然而实际应用中，要求机器人编程语言必须能够描述上述过程（参见习题12.5）。换句话说，对于目前任何任务级编程语言来说，要直接完成这种操作是非常复杂的。通常绝大部分操作必须使用动作级编程语言来完成。因此当我们讨论机器人编程语言的特征时，必须记住这个应用实例。 343

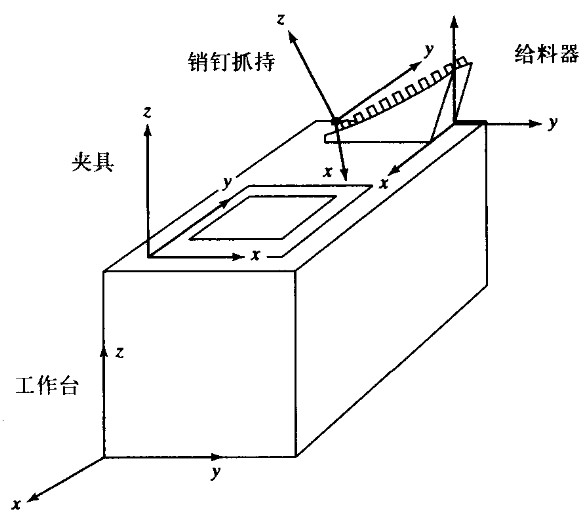
12.4 机器人编程语言的必要条件

世界模型

通过定义，操作程序涉及的一定是三维空间的运动物体，显然，任何机器人编程语言必须具有描述这种行为的功能。机器人编程语言最基本的要素就是一些专门的**几何模型**。例如，引入模型以描述一系列关节角、笛卡儿位姿和坐标系。预先定义的操作器可以对这些模型进行有效操作。在第3章中介绍的“标准坐标系”可以作为一种可能的世界模型，所有运动均在

相对于固定坐标系的工具坐标系中描述，通过与几何模型相关的任一表达式可以建立目标坐标系。

给定一种支持几何模型的机器人编程环境，就可以对每一个相关物体，通过已定义的名义变量，对机器人以及其他机器、零件、夹具进行建模。图12-3所示为示例工作单元的一部分，在相关任务的位置，附加了坐标系。在机器人程序中，每一个坐标系将由模型“坐标系”的变量表示。



344 图12-3 一个工作单元常用附加在相关物体上的坐标系建模

在许多机器人编程语言中，定义各种几何模型的名义变量，并在程序中访问它们，这种能力构成了世界模型的基础。注意，物体的实际形状不是世界模型的一部分，并且表面积、体积、质量或者其他特性也不是世界模型的一部分。在设计机器人编程系统时，在世界坐标系内能够对物体建模的能力是设计时的基本依据之一。当前大多数系统只支持前面描述的那些几何模型。

一些世界模型系统允许在名义物体之间做**关联性**说明[3]——即，已知系统中有两个或更多的名义物体已经固联在一起，此时，如果用一条语句移动一个物体，那么任何附在其上的物体也要随着一同运动。因此，在应用中，一旦销钉被插入托盘的孔中，将通知系统（通过一个语句）这两个物体已经被联接在一起。托盘随后的运动（“托盘”变量坐标值的变化）将对已贮存的“销钉”变量值随之进行更新。

在理想情况下，一个世界模型系统将包含许多操作臂必须处理的物体信息和操作臂本身的信息。例如，考虑一个系统，物体在系统中用CAD模型描述，通过定义物体的边缘、表面积、体积来描述一个物体的空间形状。系统应用这些有效数据，就能够实现任务级编程系统的许多功能。这些功能将在第13章中进一步讨论。

运动指令

机器人编程语言最基本的功能就是可以描述机器人的期望运动。在编程语言中使用运动语句，用户可按照第7章介绍的方法与路径规划器及路径生成器接口。运动语句允许用户指定

路径点、目标点以及是否采用关节插补运动或者笛卡儿空间直线运动。此外，用户可以控制整个运动过程的速度或持续时间。

为了说明各种基本运动的语法，可以下述操作臂的运动为例：(1) 操作臂运动到“目标1”的位置，(2) 然后沿直线运动到“目标2”的位置，(3) 连续运动通过“路径点1” 到“目标3”的位置停止。假定已经对所有这些路径点进行示教或逐句描述，这个程序段可写为：

用VAL II语言，

```
move goal1
moves goal2
move via1
move goal3
```

用AL语言（这里控制操作臂“garm”），

```
move garm to goal1;
move garm to goal2 linearly;
move garm to goal3 via via1;
```

345

如上所述，对于简单运动语句，大多数语言具有相似的语法。通过下述特性分析可以明显看出机器人编程语言之间在基本运动语句上的区别：

1. 采用数学方法建立坐标系、矢量和旋转矩阵的能力。

2. 类似于坐标系，以几种不同的简单符号描述几何实体的能力——同时具有符号变换的功能。

3. 约束给定运动的持续时间和速度的能力——例如，很多系统允许用户把速度设置成低速，但一般不允许用户直接给定期望的持续时间或期望的最大关节速度。

4. 相对于不同坐标系确定目标的能力，包括用户定义的坐标系和运动中的坐标系（例如在输送机上）。

操作流程

像许多传统的计算机编程语言那样，机器人编程系统允许用户指定操作流程——即通常在机器人编程语言中也有测试、分支、循环以及访问子程序甚至中断等概念。

与许多计算机应用相比，在自动化工作单元中，通常并行操作更为重要。首先，在一个工作单元中经常应用两个或者更多的机器人同时工作以减少操作周期。即使在单个机器人的应用中，如图12-2中所示的情况，机器人控制器必须以并行方式控制另一个工作单元的设备。因此，在机器人编程语言中经常有信号单元和等待单元，有时还会推出更复杂的并行操作结构[3]。

另一种常见的情况是需要用某种传感器去监测各种操作。然后，通过中断或查询，机器人系统能够根据传感器的探测信号对某种事件产生响应。一些机器人编程语言能够方便地提供**事件监测**的能力[2, 3]。

编程环境

像任何计算机语言一样，良好的编程环境能够提高编程人员的工作效率。对操作臂编程难度较大，需要频繁交互，同时需要对许多错误进行大量的测试。如果用户被迫不断反复进行程序的“编辑—编译—运行”，那么编程效率是很低的。因此，现在大多数机器人编程语言采用**解释型**语言，以便在程序开发和调试时每次只运行一条语句。有许多语句指令可使实际

装置运动，解释这些语句指令仅需要极短的时间，因此，可以忽略不计。但还需要有典型的
346 编程支持系统，例如文本编辑器、调试器以及文件系统。

传感器融合

机器人编程的一个非常重要的部分就是需要解决与传感器的交互问题。这种系统至少应能够与接触传感器和力传感器通讯，以及能够在程序中使用if-then-else结构。采用专门的事件监测器在后台检测传感器信号的变化，这个功能是非常有用的。

视觉集成系统允许视觉系统将一个相关物体的坐标发送给操作臂系统。例如，在前面的应用实例中，一个视觉系统能够确定输送带上托盘的位置，并将托盘相对于摄像机的位置和姿态返回给操作臂控制器。已知相对于固定坐标系的摄像机坐标系，因此能够根据这些信息计算出操作臂的期望目标坐标系。

一些传感器可能是某个工装中的一部分，例如，一些机器人控制器利用附着在传送带上的传感器的输入，使操作臂能够跟踪传送带的运动，当传送带运动时就可获得物体的信息[3]。

在第9章中讨论过的力控制接口能够通过专门语句允许用户指定力控制策略。这种力控制策略必须由操作臂控制系统的集成部分实现——机器人编程语言仅作为实现这些功能的接口。利用主动力控制的可编程机器人可能还需要具有其他特殊功能，例如将约束运动中采集到的力数据进行显示的能力[3]。

在支持主动力控制的系统中，期望作用力的描述应成为系统运动性能的一部分。AL语言通过指定6个刚度分量（3个移动刚度和3个转动刚度）和一个偏心力，描述基本运动中的主动力控制。这样，操作臂的外部刚度就是可编程的了。为了施加一个力，通常在施力方向将刚度置为零，同时指定一个偏心力，例如

```
move garm to goal
with stiffness=(80, 80, 0, 100, 100, 100)
with force=20*ounces along zhat;
```

12.5 机器人编程语言的特殊问题

近几年的研究进展虽然有助于可编程机器人的发展，但是可编程机器人仍然是个难题。机器人编程包含了所有传统的计算机编程问题，以及因实际情况影响引起的其他困难[12]。

内部世界模型与外部实际环境的关系

机器人编程系统的主要特点就是在计算机中建立内部世界模型。即使这个内部世界模型非常简单，然而要保证这个模型与人为建立的实际环境模型相匹配仍然存在很多困难。内部模型与外部实际环境之间的差异会引起机器人抓持物体操作困难或失败，或发生碰撞，以及
347 其他许多问题。

在编程的初始阶段，要建立内部模型与外部实际环境之间的一致性，并保证贯穿于整个程序的执行过程。在编程或调试的初始阶段，一般用户应始终保证在程序中描述的状态与工作单元的实际状态是一致的。不同于许多传统的编程，在机器人编程中，只需保存内部变量，并使内部变量保持在最初的设置状态，而实际物体的状态通常需要被重新设定。

除了每个物体位置固有的不确定性以外，操作臂本身的精度等级都是确定的。装配中的

各工步经常要求操作臂的运动精度高于其本身能够达到的精度。仍以销钉插入销孔的操作为例，这里装配公差低于操作臂的定位精度。然而更为复杂的问题是，通常操作臂的精度在它的工作空间内是变化的。

当物体的准确位置无法确定时，设法对物体的位置信息进行深入分析是必要的。有时能够由传感器完成（例如视觉传感器、触觉传感器）或者在约束运动中使用适当的力控制策略。

在操作臂程序的调试中，对程序进行修改、备份以及反复调试是非常必要的。备份可使操作臂和被操作的物体恢复至最初的状态。然而，在实际物体的操作中，即使有可能取消一个操作，但一般并不容易。例如喷涂、铆接、钻孔以及焊接操作，这些操作会引起被操作对象的实际状态发生变化。因此用户需要获得操作对象的一个新的程序拷贝，代替原来修改的拷贝。进而，在期望的操作能够试验成功之前，对那些未经过反复试验的操作，可能需要重新建立适当的操作状态。

程序前后的关联性

自下而上的编程方法是一种编写大型计算机程序的标准方法，在这种方法中，一般先开发小的低级别的程序段，然后将这些程序段汇总成一个较大的程序段，最后得到一个完整的程序。对于这种方法，一般小段程序的执行语句之间是相对无关的，因此无需对这些程序段执行的文本进行相关性假设。而对于操作臂的编程，通常不是这样的情况，在单独测试时工作可靠的程序代码，当将其置于较大的程序文本中时，常常会失效。这是由于在进行机器人编程时，受到操作臂运动的位形和速度的影响较大。

初始条件对操作臂编程影响较大——例如，操作臂的初始位置。初始位置会影响运动轨迹。操作臂的初始位置也可能影响操作臂在一些临界运动区域的运动速度。例如，对于第7章中讨论过的操作臂沿三次样条关节空间路径运动的情况来说，这些程序是能够成立的。这些影响有时能够通过仔细编程加以解决，但是通常在源程序单步调试完成之前，这样的问题并不会 348
出现，而且这与前面执行的程序有关。

由于操作臂精度不高，因此在某一位置为执行某一项操作编制的程序段，当用于其他位置进行同一种操作时，很可能需要重新调试（即对位置重新示教或者进行类似的工作）。在工作单元内操作位置的变化将引起达到目标位置过程中操作臂位形的变化。这种在工作单元内部对操作臂运动重新定位的方法可以检验操作臂运动学模型和伺服系统的精度以及其他经常出现的问题。这种重新定位会引起操作臂运动位形的变化——例如，从左肩部到右肩部或从肘上部到肘下部的运动。此外，这些位形的变化会引起操作臂由原来的简单小范围运动变为大范围运动。

当确定操作臂工作空间内不同区域的路径时，空间轨迹形状特征很可能会改变。这是关节空间轨迹方法特有的现象，但是采用笛卡儿路径规划方法也会在奇异位置附近产生同样的问题。

当对操作臂的运动进行第一次调试时，通常比较稳妥的方法是让操作臂缓慢运动。因此当操作臂在运动中与周围物体发生碰撞时，操作者能够及时停止操作臂的运动，同时操作者也可以密切监视操作臂的运动。操作臂在低速下经过初步调试后，一般希望增加操作臂的运动速度。这样做可能会引起某些运动发生变化。当需要以较快的速度跟踪轨迹时，许多操作臂控制系统中的限制条件会产生较大的伺服误差。同样，在包括接触环境的力控制情况下，

速度变化能够完全改变正确的力控制策略。

操作臂的位形也会影响作用力的精确度和准确度。即如何较好地在一个确定的位形中调整操作臂的雅可比的功能，这在开发机器人程序的时候一般很难考虑。

误差校正

处理实际环境的另一个直接问题就是物体没有精确处在规定的位置，因此，这种操作运动可能就会失败。在操作臂编程中应尽量全面考虑这些问题，并且使装配操作尽可能可靠。但是，尽管如此，误差还有可能产生，因此操作臂编程的一个重要方面就是如何对这些误差进行校正。

由于各种原因，用户程序中的任何运动程序几乎都可能出现问题。常见的原因是物体位置移动或者从机械手中脱落、在应有的位置找不到物体、在插入操作时发生卡住现象以及不能够对孔进行定位等。

关于误差校正的首要问题是识别一个误差是否确实存在。因为机器人的感觉和推理能力一般十分有限，因此*误差检测*通常是很困难的。为了检测一个误差，机器人程序应当包括某种直观的测试。这种测试可以检查操作臂的位置是否位于适当的范围；例如，操作臂在进行
349 一个插入操作时，位置没有变化，表示可能发生了卡住现象，而位置变化太大，则表明可能销钉根本就没插入孔内或者物体已经从机械手中滑落。如果操作臂系统具有某种视觉功能，那么，它就可以拍照并检查物体是否存在，如果物体存在，可以报告它的位置。另外还可以采用力检测，例如通过测量携带物体的重量可以检查物体是否仍在机械手中或是滑落了，或者在运动时，检查接触力是否保持在确定的范围内。

在程序中的每一条运动语句都可能会失效，所以这些直观的检查可能很繁琐，并且可能比程序其他部分占用更多的存储空间。试图处理所有可能的误差是非常困难的，通常只对几种最有可能失效的语句进行检查。预测机器人应用程序的哪一部分可能失效，在编程开发阶段，就应对机器人进行大量的人机交互以及分部测试。

一旦检测出误差，就要对它进行校正。这可以在程序控制下完全由操作臂进行，或者由用户进行人工干预，或者两者结合进行。在任何情况下，在校正过程中也可能产生新的误差。显而易见，如何通过编程来校正误差可能成为操作臂编程的主要部分。

在操作臂编程中利用并行操作可能会使误差校正更加复杂。当几个进程同时运行，并且其中一个进程产生误差时可能会影响其他进程。在许多情况下，尽可能备份这个出错的进程，而允许其他进程继续执行。有时，必须对几个或全部运行程序进行复位。

参考文献

[1] B. Shimano, "VAL: A Versatile Robot Programming and Control System," Proceedings of COMPSAC 1979, Chicago, November 1979.

[2] B. Shimano, C. Geschke, and C. Spalding, "VAL II: A Robot Programming Language and Control System," SME Robots VIII Conference, Detroit, June 1984.

[3] S. Mujtaba and R. Goldman, "AL Users' Manual," 3rd edition, Stanford Department of Computer Science, Report No. STAN-CS-81-889, December 1981.

[4] A. Gilbert et al., *AR-BASIC: An Advanced and User Friendly Programming System for Robots*, American Robot Corporation, June 1984.

[5] J. Craig, "JARS—JPL Autonomous Robot System: Documentation and Users Guide," JPL Interoffice memo, September 1980.

[6] ABB Robotics, "The RAPID Language," in the *SC4Plus Controller Manual*, ABB Robotics, 2002.

[7] R. Taylor, P. Summers, and J. Meyer, "AML: A Manufacturing Language," *International Journal of Robotics Research*, Vol. 1, No. 3, Fall 1982.

[8] FANUC Robotics, Inc., "KAREL Language Reference," FANUC Robotics North America, Inc, 2002.

[9] R. Taylor, "A Synthesis of Manipulator Control Programs from Task-Level Specifications," Stanford University AI Memo 282, July 1976. 350

[10] J.C. LaTombe, "Motion Planning with Uncertainty: On the Preimage Backchaining Approach," in *The Robotics Review*, O. Khatib, J. Craig, and T. Lozano-Perez, Editors, MIT Press, Cambridge, MA, 1989.

[11] W. Gruver and B. Soroka, "Programming, High Level Languages," in *The International Encyclopedia of Robotics*, R. Dorf and S. Nof, Editors, Wiley Interscience, New York, 1988.

[12] R. Goldman, *Design of an Interactive Manipulator Programming Environment*, UMI Research Press, Ann Arbor, MI, 1985.

[13] Adept Technology, *V+ Language Reference*, Adept Technology, Livermore, CA, 2002.

习题

12.1 [15]写出一段机器人程序（自选一种语言），在位置A拾起一个质量块，并且将其放到位置B。

12.2 [20]用可能形成机器人编程基础的简单英语指令描述系鞋带这个过程。

12.3 [32]设计一种新型的机器人编程语言的语法。包括给出运动轨迹的持续时间和速度、外围设备的I/O语句、给出控制夹持器的指令以及发出力检测的指令（即保证安全运动）。可以不考虑力控制以及并行操作程序（包括在习题12.4中）。

12.4 [28]通过附加力控制语法和并行操作语法，对习题12.3中的新型机器人编程语言规范进行扩展。

12.5 [38]用一种商品化的机器人编程语言写一段程序，能够执行12.3节中描述的操作过程。可对相关的I/O接口和其他具体问题做任何合理的假设。

12.6 [28]用任何一种机器人语言，写一段程序用于卸下任意尺寸货盘上的零件，如果货盘是空的，这个程序应能根据货盘和人工操作器的信号对货盘进行跟踪检测。假定零件被卸到传送带上。

12.7 [35] 用任何一种机器人语言，写一段程序用于卸下任意尺寸源货盘上的零件，并且在任意尺寸的目标货盘中装入零件。如果源货盘是空的以及目标货盘是满的，这个程序应能根据货盘和人工操作器的信号对货盘进行跟踪检测。

12.8 [35] 用任何一种功能的机器人语言，写一段程序，采用力控制，在一个香烟盒中装满20支香烟。假设操作臂的精度约为0.25in，那么这个力控制可以用于许多操作。香烟置于传送带上，一个视觉系统可以给出香烟的坐标。

12.9 [35] 用任何一种功能的机器人语言，写一段程序，实现一部普通电话机手持部分的装配。6个零件（手柄、麦克风、扬声器、两个盖子以及电话线）放在一个零件箱内，这个零件箱是一个固定上述各种零件的特殊货盘。假设有一个放置和固定手柄的夹具。应给出其他任何需要的合理假设。

12.10 [33]写一段机器人程序，实现两个操作臂的控制。其中一个名为GARM，它有一个抓持酒瓶的末端执行器。另一个名为BARM，它可以抓持一个酒杯，其上安装有一个腕力传
351 感器，当酒杯斟满时，它能够发出信号给GARM，使其停止倒酒。

编程习题

用Pascal语言编写几个子程序，为你开发的程序创建一个用户接口。当给定这些程序时，“用户”就可以写一个Pascal程序对上述程序进行调用，从而可以对一个2自由度机器人进行仿真操作。设定初始条件，允许用户设定固定坐标系和工具坐标系——即，

```
setstation(SrelB:vec3);
settool(TrelW:vec3);
```

其中“SrelB”给定了相对于机器人基坐标系的固定坐标系，“TrelW”给定了相对于操作臂腕部坐标系的工具坐标系。给定初始运动

```
moveto(goal:vec3);
moveby(increment:vec3);
```

其中“goal” 给定了相对于固定坐标系的目标坐标系。“increment”给定了相对于当前工具坐标系的目标坐标系。当用户第一次调用“路径模式”函数时，允许对多段路径进行描述。然后，指定运动通过各路径点，并最终给出“运行路径”——例如，

```
pathmode; (* enter path mode *)
moveto(goal1);
moveto(goal2);
runpath; (* execute the path without stopping at goal1 *)
```

352 编写一段简单的“应用”程序，使用这个系统打印出操作臂每隔ns的位置。

第13章 离线编程系统

13.1 概述

离线编程系统（OLP）是一种已经被广泛应用的、以计算机图形学为依托的机器人编程语言，它可使机器人程序的开发能够在不用访问机器人本身的情况下进行⊖。不论是作为当今工业自动化装备的辅助编程工具，还是机器人研究的平台，离线编程系统都具有重要的意义。在设计这样一个系统时，需要考虑许多问题。在这一章里，首先对这些问题进行讨论[1]，然后再对这个系统进行深入研究[2]。

在过去的20年中，工业机器人市场的发展不像人们曾经预测的那样迅速。一个主要原因是，机器人的使用仍然很困难。在现场安装一台机器人，以及使用这个系统进行生产准备，需要大量的时间和专业技术。由于各种原因，这种问题在某些应用中显得更为严重。因此，我们看到在某些应用领域（例如电焊和喷涂），机器人自动操作比在其他应用领域的发展要迅速得多（如：装配）。看来缺乏受过全面训练的机器人系统的操作者，或多或少地限制了机器人的应用范围。在一些制造公司，企业管理者鼓励扩大机器人的应用范围，而操作技术人员难以实现这个要求。因此现有的大部分机器人在各种应用中并不能充分发挥它们的作用。这种现象表明，当前工业机器人还不能以适当的方法安装和编程，得以方便使用。

由于很多原因使得机器人编程是一个非常困难的工作。首先，机器人编程本质上与一般计算机编程是相关的，因此在机器人编程中同样存在着许多计算机编程中遇到的问题。但是机器人编程或任何可编程机器存在的一些特殊问题使得生产准备软件的开发变得更加困难。正如我们在前一章看到的，这些特殊问题大部分是由于机器人操作臂与它所在的实际环境相 353
互作用产生的[3]。即使是一个简单的编程系统，也要以物体位置的形式来保持实际环境的“世界模型”，同时必须“知道”各种已编码的物体在程序设计中是否存在。在机器人程序开发过程中（尤其是后来的生产应用中），必须保证机器人编程系统确定的内部模型与机器人周围环境的实际状态一致。在用交互方式调试操作臂程序时，需要经常用人工初始化机器人环境状态——工件、刀具等必须返回到它们的初始位置。当机器人对一个或多个工件执行不可逆的操作时（例如钻孔或者靠模铣削），这种状态初始化变得尤为困难（有时代价非常昂贵）。实际环境对初始化的最主要的影响是当程序中的问题恰巧出现在工件、刀具上甚至操作臂自身处于某种意外的不可逆的操作中。

虽然保持操作臂环境的精确内部模型是困难的，但毫无疑问，这样做会让我们受益匪浅。在整个传感器研究领域，也许最显著的是计算机视觉领域，都在集中精力开发能够检验、修

⊖ 第13章的内容摘自两篇论文：一篇摘自*International Symposium of Robotics Research*,R.Bolles and B.Roth（作者），1988（见参考文献[1]）；另一篇摘自*The Algorithmic Perspective*,P.Agarwal et al.（作者），1988（见参考文献[2]）。

正或发现世界模型的技术。显然，为了将一种算法应用于机器人指令生成问题中，那么这种算法就需要获取机器人以及周围环境的模型。

在机器人编程系统的开发中，编程技术的发展似乎与编程语言所参照的内部模型的精确性有直接关系。早期的关节空间“示教”机器人系统使用了局部世界模型，系统只能提供有限的途径去帮助编程人员完成一项任务。一小部分高级的机器人控制器包含了运动学模型，因此系统至少可以帮助用户通过关节运动实现机器人的笛卡儿运动。随着机器人编程语言（RPLs）的发展，目前可以支持很多不同的数据类型和操作，编程人员可按照要求用来建立环境模型的属性和计算机器人的运动。一些机器人编程语言（RPLs）支持这样的世界模型建模单元，比如附件、力和运动的数据类型，以及其他特性[4]。

今天机器人编程语言可能应该叫做“显式编程语言”，系统的每一个动作都必须由操作工程师编程。另外一种编程模式为任务级编程系统（TLP），在这种模式下，编程人员可能只需陈述“插入一个螺栓”、甚至可以是“建立一个烤面包箱”这样的高级目标语句。这种系统使用人工智能技术自动生成运动和策略规划。然而，这样高级的任务级语言至今尚未问世，现在研究人员正在对这种系统的各部分进行研究开发[5]。任务级编程系统需要一个非常完整的机器人模型以及机器人环境的模型才能进行自动规划操作。

虽然本章在某种程度上来说主要讨论机器人编程的特定问题，但离线编程系统的概念已
354 扩展到工厂级任何可以编程的设备。一种普遍的观点认为：离线编程系统在需要重新编程时可以不占用生产设备，因此，自动化工厂可保证大部分时间处于生产状态。它们也可以将产品开发过程中使用的计算机辅助设计（CAD）数据库与实际产品生产自然联系起来。在某些应用中，这种直接使用CAD设计数据的方法可以大大减少制造设备所需的编程时间。

机器人离线编程还有其他潜在的优点，机器人用户正日渐亲睐这种编程方式。我们已经讨论了一些机器人编程的问题，其中大部分与机器人程序控制的外部实际工作单元有关。反复调试各种不同的操作规划是一件非常枯燥的事情。机器人编程仿真使大量的编程工作限制在计算机内部——直到接近于实际应用。在这种情况下，许多机器人编程特有的问题将逐渐较少。

离线编程系统应当作为从显式编程系统到任务级编程系统的发展途径。最简单的离线编程系统只是机器人编程语言的图解扩展，然而由此能够将它扩展到任务级编程系统。通过给各种子任务提供自动解决方案（仅当这些解决方案是有效的），然后让编程人员在仿真环境下对这些方案进行选择，便可以逐渐完成这种扩展。在找到建立任务级系统的方法之前，用户仍然需要反复评估自动规化的子任务，并指导应用程序的开发。这样看来，离线编程系统就成了任务级规划系统研发的重要基础，当然，为了支持这种工作，许多科研人员已经开发了各种离线编程系统的组件（例如三维模型、图形显示和程序后处理器）。因此，离线编程系统对于科研来说是一种有用的工具，同时对当前的工业生产也是一种辅助工具。

13.2 离线编程系统的核心问题

本节将讨论离线编程系统设计中应该考虑的问题。对这些问题的分析有助于建立一个离线编程系统的定义。

用户接口

开发离线编程系统的主要目的是创建一个使操作臂编程更加容易的环境，因此用户接口

显得尤为重要。然而另外一个主要目的是为了在编程时不需要使用物理设备。表面看来，这两个目的似乎互相矛盾——当你明白了这些问题时，会看到机器人的编程是很困难的。如果没有物理设备，机器人的编程怎么会更容易呢？这个问题是离线编程系统的实质问题。

工业机器人生产商早已知道，随同机器人提供的机器人编程语言，很多生产人员并不能够很好使用。由于这个原因以及其他一些历史原因，许多工业机器人一般提供两种接口[6]。一 355
种适合编程人员，另一种适合非编程人员。非编程人员使用示教盒直接与机器人交互进行程序开发。编程人员通过编写机器人编程语言代码，并与机器人交互，以便对机器人工作点进行示教和调试程序流程。总之，这两种程序开发方式兼顾了易操作性和灵活性。

如果把OLP看作是RPL的扩展，那么OLP作为用户接口的一部分自然就包含了RPL。这种机器人编程语言应当具备机器人编程系统中那些有价值的特征。例如，作为机器人编程语言，**交互式语言**比汇编语言的效率高得多。对于后者，在用户每次修改程序时，都必须按照“编辑—编译—运行”的这种循环模式进行。

用户接口的语言部分很多是从“传统的”机器人编程语言继承过来的，它是低级的（即容易使用的）接口，在离线编程系统中应当认真注意这个问题。该接口的一个重要功能是被编程的机器人及其环境可以在计算机上进行图形显示。使用一个点击装置，例如鼠标，用户可以指定屏幕上的各个位置或物体。用户接口设计应准确说明，用户该如何与屏幕交互指定一条机器人程序。同样点击装置可以指定“菜单”中的选项，以确定工作模式或调用各种功能。

利用图形交互界面的一个基本功能是对机器人的工作点或6自由度“坐标系”进行示教。在获得卡具和工件的三维模型后，离线编程系统使得上述任务变得非常容易。用户可以通过图形接口在表面上指定点的位置，允许坐标系的某个方位与局部表面的法向相同，提供偏移和旋转的方法等。从图形窗口到仿真环境，使得用户根据具体应用很容易地确定各种操作任务。

一个设计得好的用户接口自始至终都可以让非编程人员完成许多操作。此外，离线编程系统应该可以把非编程人员“示教”的坐标系和动作顺序逐句转换成机器人编程语言。这些简单的程序可以由经验丰富的编程人员以机器人编程语言的形式加以修改。机器人编程语言的使用价值在于编程人员可以通过任意代码编程实现更为复杂的操作。

三维建模

离线编程系统中的一个基本功能是，利用图形描述对机器人和工作单元进行仿真。这要求对工作单元中的机器人及所有的卡具、零件和刀具进行三维实体建模。为了加速程序开发，希望能够使用CAD系统中的原始设计直接作为零件或刀具的CAD模型。因为CAD系统在工业中逐渐流行，因此这种几何数据越来越容易获得。由于对这种贯穿于设计到生产的CAD集成系统的迫切需求，因此离线编程系统如果能够包含一个CAD建模子系统或者CAD设计系统的一部分是非常有意义的。如果离线编程系统是独立的，那么它必须有合适的接口与外部CAD系统进行模型转换。而且，任何一个独立的离线编程系统至少应当具备一个简单的局部CAD 356
工具，以便快速创建非主要工作单元的模型，或者在输入的CAD模型中加入与机器人相关的具体数据。

离线编程系统通常要求对空间形状有多重表达方式。对于许多操作，一般已有曲面和体积的精确解析描述，但是为了利用显示技术，经常需要其他表达方法。当前的技术非常适合于显示基本单元是平面多边形的系统，因此，一个物体的形状虽然可以用光滑表面描述，但

是实际显示（尤其是动画）却需要用面阵的方式表达。对于用户接口的图形操作，例如点击表面上的一个点，但内部操作应当是确定真实表面上的一个点，即使用户在屏幕上看到的是用几何面阵描述的模型。

物体三维几何模型在**自动碰撞检测**中具有重要用途——即在仿真环境下，物体之间发生任何碰撞时，离线编程系统应该自动提示用户，并且指明发生碰撞的确切位置。装配之类的操作可能包括许多期望的“碰撞”，因此必须能够通知系统某些物体之间的碰撞是允许的。当物体在设定的实际碰撞误差范围内通过时，系统有必要发出碰撞提示。当前，一般三维实体的精确碰撞检测是一个难题，但是对于面阵模型的碰撞检测是比较可行的。

运动仿真

保证仿真环境有效性的重要因素是对每一个被仿真的操作臂的几何形状进行正确无误的仿真。对于逆运动学，离线编程系统能够以两种不同的方式与机器人控制器接口。第一种方式是用离线编程系统替代机器人控制器逆运动学模型，并不断将机器人关节空间的位置传送给控制器。第二种方式是将笛卡儿位置传送给机器人控制器，让控制器使用制造商提供的逆运动学模型来求解机器人位形。一般第二种方法的效果更好一些，尤其是机器人制造商已开始在他们生产的机器人上配置机械臂特征标定规范。这些标定技术为每台机器人制订了独立的逆运动学模型。这种情况下，一般是希望将笛卡儿空间信息传送给机器人控制器。

上述讨论主要说明用于仿真器的正向和逆向运动学函数必须能反映机器人制造商在机器人控制器中提供的名义函数。制造商需要对提供的逆运动学函数给出详细说明，以便仿真软件能够对这些逆运动学函数进行仿真。为了解决奇异性问题，逆运动学算法的选择必须是任意的。例如，当PUMA560机器人的关节5在零位时，关节4和关节6的轴线共线，且存在一个奇异位形。机器人控制器的逆运动学函数只能够解出关节角4和关节角6的角度和，因此必须给关节4或关节6任意赋一个值。离线编程系统必须能够对任何一种算法进行仿真。对于多重解情况，应选择最接近的解，这在下一个例子中进行说明。在对实际操作臂进行仿真时，为
357 了避免潜在的致命错误，仿真器使用的算法必须与控制器一样。在机器人控制器中偶然发现了一个很有用的特性，即能够给定笛卡儿目标指令，并且能够确定操作臂应当使用哪一个可行解。这个特性可使仿真器不再需要对解的算法进行选择。离线编程系统可以简单地将它选择的可行解提供给机器人控制器。

路径规划仿真

除了对操作臂的静态位置进行运动仿真外，离线编程系统应能够对操作臂在空间移动的路径进行精确仿真。另一个主要问题是，离线编程系统需要对机器人控制器采用的算法进行仿真。不同的机器人生产商采用的路径规划和实施的算法也相当不同。为判断机器人与周围环境是否发生碰撞，对选择的空间路径的形状进行仿真是非常重要的。为了预测操作的循环时间，对轨迹的瞬时形状进行仿真也很重要。当机器人在一个运动环境中操作时（例如附近有另外一台机器人），为了精确预测是否发生碰撞，也有时为了预测通讯和运动同步的问题（例如死机），对运动的瞬时属性进行精确仿真同样是很有必要的。

动力学仿真

如果离线编程系统对机器人控制器的轨迹规划算法仿真得比较理想，而且实际的机器人

跟踪期望轨迹的误差可以忽略时，那么在对操作臂进行运动仿真时可以不考虑动力学特性。但是，在高速和重载情况下，轨迹跟踪误差就显得很重要了。对操作臂和运动物体进行动力学建模以及对用于操作臂控制器的控制算法进行仿真时都需要对跟踪误差进行仿真。目前的实际困难是如何从机器人供应商那里获得足够的信息以使动力学仿真确有实际价值。但在某些情况下，动力学仿真是富有成效的。

多过程仿真

一些工业应用中，有时两台或者更多的机器人在同一环境下协同操作。即使单个机器人的工作单元，通常也包含输送带、传送线、视觉系统以及其他一些与机器人必须交互作业的运动装置。为此，离线编程系统能够对多个移动装置以及包括**并行性**的其他作业进行仿真将是非常重要的。实现这种功能的基本要求是，在这个系统中基本的执行语句必须是一种多过程语言。这种编程环境能够为一个工作单元中的两个或更多的机器人单独编写机器人控制程序，然后通过同时运行这些程序对这个工作单元的操作进行仿真。在语言中加入提示信号及等待单元，可以使机器人之间的交互作业与仿真操作的情况完全相同。 358

传感器的仿真

研究表明，机器人程序中的大部分语句并不是运动语句，而是初始化、错误检查、输入/输出以及其他一些语句[7]。因此，重要的是离线编程系统能够对操作过程提供一个全面的仿真环境，包括与传感器、各种输入/输出与其他设备的通讯等交互的环境。一个支持传感器及多任务仿真的离线编程系统，不仅可以检验机器人运动的可行性，而且也能对机器人程序中的通讯及同步性进行校验。

翻译成目标系统的语言

当前，一直困扰着工业机器人（及其他可编程自动化设备）用户的问题是，几乎每个离线编程系统的供应商都发明了各自的语言来对他们的产品进行编程。如果一个离线编程系统想成为适用于所有操作装备的通用系统，它必须要解决不同语言之间的翻译问题。解决这个问题的一个办法是在离线编程系统中只使用一种编程语言，然后通过后处理把它译成目标设备可接受的语言。能够把已有的程序加载到目标设备中上传到离线编程系统的功能是很有必要的。

将离线编程系统直接与语言翻译问题联系起来，会有两个潜在的好处。一个好处是：大部分离线编程系统的用户注意到，用一个单一的、通用的接口能够对各种机器人进行编程，能够解决掌握和处理多种自动编程语言的问题。另一个好处是出于经济上的考虑：将来会有成百甚至是成千的机器人在工厂使用。然而，功能强大的编程环境（例如编程语言和图形接口）的成本问题可能会影响机器人的应用。相反，给每一台机器人提供一个简单的、“傻瓜的”和便宜的控制器，让它们从办公室环境中一个功能强大的、“智能的”离线编程系统上下载程序会更加经济。因此，对于离线编程系统来说，重要的问题是能够把一个功能强大的通用语言编写的应用程序翻译成在廉价的处理器中执行的简单语言。

工作单元的标定

任何实际环境的计算机模型都存在不准确性，这是无法避免的问题。为了使离线编程系

统开发的程序可实际应用，则必须将**工序标定**的方法集成到系统中去。这个问题的影响程度随应用情况的不同会有很大变化，对于某些任务的离线编程来说，这种可变性使得这种方法比其他编程方法更便于应用。对于一个操作来说，如果机器人的大部分工作点必须要用一个实际机器人反复示教才能解决不准确性的问题，那么离线编程系统的有效性就丧失了。

许多实际应用经常与刚性物体的作业有关。以在一个舱壁上钻几百个孔的作业为例。舱
359 壁相对机器人的实际位置可通过实际机器人对舱壁上的三个点进行示教确定。如果所有孔的位置均标注在CAD坐标系中，那么这些孔的位置可以根据这三个示教点自动更新。在这种情况下，机器人只需示教这三个点，而非几百个点。大多数任务都属于这种“对刚性物体进行多工位操作”的情况——例如，PC机主板上元器件的插装、布线、点焊、弧焊、码垛、喷涂及去毛刺等作业。

13.3 引导仿真器

在本节中，我们介绍一种离线仿真系统：由Adept技术公司开发的“引导仿真”系统[8]。这个引导仿真系统实际上是由三个密切相关的仿真系统组成的。在此我们分析一下用来对工厂里的各个工作单元进行仿真的引导部分（被称为“引导/工作单元”），特别是这种系统一般并不用于实际环境的多因素建模，这样就减少了仿真编程人员的工作量。本节我们将讨论用以提高仿真器能力的“几何算法”，用于对某个特定的实际环境进行仿真。

为了便于应用，要求仿真系统尽量与实际环境相一致。仿真器越接近于实际环境，对于用户来说，用户接口形式就变得越简单，因为实际环境对我们大家都是非常熟悉的。同时，为了权衡计算速度及其他因素的影响，在进行仿真设计时，只对实际环境中所关心的部分进行仿真，而不考虑其他许多细节。

将引导仿真系统作为主机，非常适合于各种几何算法。针对实际环境不同部分建模的需要，同时，为了减轻用户负担，需要经常自动进行几何计算，因此使得这种算法日益重要。引导仿真系统提供了这样一个环境，可以利用一些先进的算法解决工业中发生的实际问题。

引导仿真系统在设计之初，就要求其*编程方式*尽量接近于实际机器人系统的编程方式。虽然系统提供了一些高级的规划和优化工具，但我们认为更重要的是应使基本的编程交互方式与实际硬件系统相一致。因此对各种几何算法的实际需要是由产品开发的需求决定的。这些算法的适用范围极广，可从极为简单的问题到相当复杂的问题。

如果仿真器可以像实际系统那样进行编程，那么实际环境中的作用和反作用关系一定可以通过仿真系统自动建模。目的是使系统用户不必用“专用仿真代码”编写程序。举一个简单的例子，如果命令机器人打开夹持器，那么由于重力的作用，被抓持的零件会脱落，甚至会掉到地面反弹起来，最后处于某种稳定状态。如果必须要求系统用户指定这些实际环境中的运动过程，那么要求仿真系统像实际系统那样自动编程的目的就没有达到。只有当仿真环境不需要通过用户就能够“知道如何”与实际环境一致，那么用户就能够很容易地使用这个仿真系统了。

大部分（而不是全部）机器人或其他机械设备的商品化仿真系统并不是直接去解决这个
360 问题。它们一般只是“允许”用户（实际上是*要求*用户）在编入控制仿真装置的程序中插入专用仿真指令。以下列程序代码简要说明：

```
MOVE TO pick_part
CLOSE gripper
```

```
affix(gripper,part[i]);
MOVE TO place_part
OPEN gripper
unaffix(gripper,part[i]);
```

这里要求用户必须插入“affix”和“unaffix”指令，这两条指令（分别）用来实现工件在被夹持时随夹持器一起运动，并且在工件被释放时停止运动。如果仿真器允许机器人用它自身的语言编程，那么这种语言的功能一般不能够足以支持这些要求的“专用仿真指令”。那么为了对实际环境的交互过程进行仿真，就需要用到第二套指令集，甚至可能采用不同的语法。这种方案注定了仿真系统的编程不会“像实际系统一样”，也注定会加重用户编程的负担。

从上面的例子我们可以看出，第一种几何算法是在夹持器接近零件时，根据夹持器的几何尺寸和零件间的相对位置判断出哪一个零件（如果有的话）会被夹紧以及在夹持器内零件自动排列的可能方式。在引导仿真的情况下，我们用一个简单的算法解决这个问题的前一部分。在这种受限情况下，可计算出夹持器内零件的“排列方式”，但是这种排列一般需要系统用户进行预先引导仿真。因此，虽然引导仿真到目前为止尚未达到最终目标，但已经取得了相当进展。

物理建模与交互系统

在一个仿真系统中，总是要将计算时间与仿真精度进行对比，对建模的复杂性进行权衡。为了通过引导仿真达到预定目标，重要的是要保证系统始终能够完全交互，因此要求进行引导仿真设计时，应考虑能够使用各种近似模型——例如使用准静态近似模型，这可能是一种更精确的完整动力学模型。虽然“完整动力学”模型不久就可能得到应用[9]，但是考虑到当前计算机硬件、动力学算法以及CAD模型的水平，因此仍然需要做出上述权衡。

零件翻转的几何算法

在一些工业上使用的供料系统中，零件会在供料输送带表面上以某种方式翻转，使用计算机视觉系统可以确定机器人所要求的零件的位置。用仿真系统对这种自动化系统进行辅助设计，这表明仿真系统必须能够预测零件如何下落、反弹以及静止的方位，即稳定状态。 361

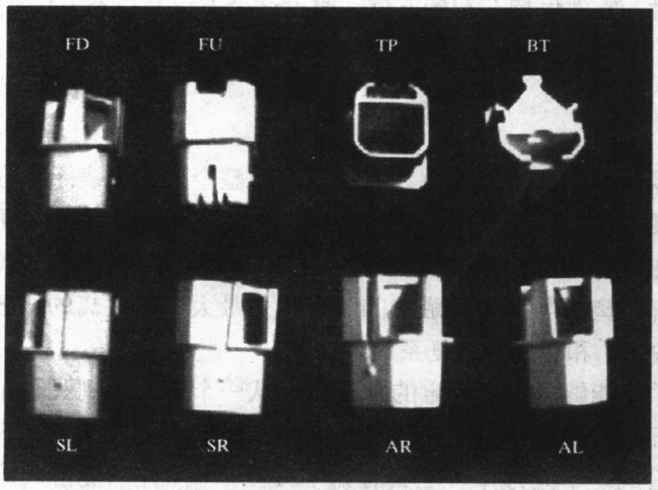


图13-1 零件的8种稳定状态

稳态概率

在参考文献[10]中，当输入任意一个几何实体（由CAD模型所描述）时，应用一个算法可以计算出这个实体在水平面上的N种可能的静止状态，称为零件的*稳定状态*。进而，在这种算法中可使用准静态扰动方法去估计N种稳定状态中每一种状态出现的概率。可以通过对样件进行实际试验来估计稳态预测结果的准确性。

图13-1列出了一个专用试件的8种稳定状态。为了将稳态预测算法和真实情况相比较，借助于Adept机器人及其视觉系统，我们对试件进行了26 000多次的下落试验，并记录了稳态结果。表13-1是这个零件的实验结果。从这些结果可看出，这个算法的特性-稳态预测误差范围通常是5%～10%。

表13-1　试件稳态概率预测值与实测值的比较

稳定状态	实测值	实测值百分比	预测值百分比
FU	1 871	7.03%	8.91%
FD	10 600	39.80%	44.29%
TP	648	2.43%	7.42%
BT	33	0.12%	8.19%
SR	6 467	24.28%	15.90%
SL	6 583	24.72%	15.29%
AR/AL	428	1.61%	0.00%
总计	26 630	100%	100%

下落高度函数的调节概率

显然，如果一个零件在非常小的高度（如1mm）从夹持器中落到一个平面上，那么各种稳态概率与零件从大于某一*临界高度*处下落时的稳态概率不同。在引导仿真时，当零件从等于或大于零件本身最大尺寸的高度下落时，可以采用*稳态估计*算法得出的概率。对于下落的高度低于零件本身最大尺寸的情况，可按照零件的初始方位和下落高度调整稳态概率。当下落高度趋于无穷小时，零件保持其初始方位（假设这个方位是稳态方位）。这对整个概率算法是一个重要的补充，因为零件从较小高度下落到支撑平面上是一种非常典型的情况。

反弹仿真

引导仿真中的零件可以用恢复系数和零件所处的整个表面来表示。在公式中使用这两个因素的乘积可以预测零件下落后反弹的高度。这个具体方法十分重要，因为在某些供料系统的仿真中，它们将影响零件的分散或堆积程度。当零件反弹时，将会按照均匀的分布方式成辐射状分散开。反弹距离（与初始接触点的距离）是最大分布距离的函数，它可由下落高度函数（系统的能量输入）和相应的恢复系数来计算。

引导仿真中的零件能够以一个确定的分布依次从一个表面跳到另一个表面。还可以对一些确定的表面进行标定，使零件只能在这些表面内反弹，而不能从这些表面*弹出去*。在引导仿真中将整个系统看成一个立方体，它具有如下特性——零件只能落到这些立方体内部，而绝不会从这些立方体中弹出去。

堆积和混迭操作的仿真

为简化起见，引导仿真中的零件总是停留在一个支承平面上。如果零件互相混迭或堆积起来，这表明零件之间是互相交叉的（即这些零件的布尔交叉体积是非空的）。这可以大大减少计算量，即不需要对零件之间可能以各种方式相互混迭或堆积进行几何计算。

引导仿真中的零件可以用混迭因子来表示。例如，像大理石这样的物体，它的混迭因子 362~363
是0.0，因为当大理石在一个支承表面上翻转时，大理石从不会堆积或混迭起来，而是在表面上逐渐散开。另一方面，像密圈弹簧这样的零件，它的混迭因子接近1.0，因为它们非常容易相互缠绕在一起。在空间搜索算法中，当一个零件下落并反弹时，零件总是趋向于反弹到开放的空间表面。开放空间是零件混迭因子的函数，但是准确地找到开放空间是相当困难的。通过系数的调整，引导仿真系统能够对零件的翻转和部分缠绕进行仿真。现在还没有从零件的几何形状自动计算出混迭因子的算法，这是一个悬而未决的问题。通过用户接口，引导仿真用户可以对零件设置适当的混迭因子。

零件抓持的几何算法

在编程和实际机器人应用中的主要困难是处理引导仿真时的抓持位置和夹持器的详细设计问题。在仿真系统中加入规划算法可能会引起较大的冲突，目前这还是一个研究课题。在这一节中，我们对引导仿真中常用的算法进行适当讨论。这些常用算法相当简单，因此这些算法都是常用的。

应抓持零件的计算

当工具或吸盘式末端执行器接近零件时，引导仿真系统可以用一个简单的算法来计算哪一个零件（如果存在）应被机器人抓持。首先，引导仿真系统应计算出哪个支承面在抓持器正下方。然后，对于在这个表面上的所有零件，引导仿真系统将搜索包含抓持器TCP（工具中心点）的每一个约束空间（相对于当前的稳定状态）。如果满足这个条件的零件不止一个，引导仿真系统将会在所有零件中选择最近的一个去抓持。

缺省抓持位置的计算

引导仿真系统可以通过稳态估计器中的模型预测每一个零件的稳态方位，自动确定一个抓持位置。由于当前的算法过于简单，因此还需要提供图形用户接口使用户能够对这些抓持点进行编辑和重新定义。当前的抓持算法是零件的约束空间和夹持器的几何尺寸的函数，夹持器可以是平行夹爪，也可以是吸盘。只要计算出每一个稳定状态的缺省抓持位置，缺省的路径和下落高度也就自动生成了。

抓持过程中零件排列的计算

在某些重要的工业生产过程中，系统设计人员期望达到这样的效果：当机器人末端执行器运动时，被抓持的零件会沿着末端执行器的夹持表面以某种方式自动排列。对于消除零件相对于机器人的微小定位误差来说，这种能力是很重要的。

对吸盘式夹持器的操作过程进行仿真是非常必要的。当吸盘工作时，零件被吸盘“提”

起来，这时零件相对于末端执行器的方位发生了明显改变。通过零件的几何形体做一条直线垂直于吸盘的中心线，引导仿真系统据此对这种操作过程进行仿真。不论这条直线通过这个
364 多边形零件模型的哪一个面，都能够计算出抓持的方位——零件上这个面的法线与吸盘底面的法线方向相反。当零件的方位改变时，绕这条贯通直线的旋转量是最小的（当抓持零件时，零件不会绕吸盘的轴线旋转）。如果没有对这个操作过程进行仿真，仿真器就不能真实描述吸盘抓持器的抓放策略。

我们已经提供了一种规划方法，当平行夹爪夹紧零件时，允许零件绕Z轴旋转。对于一些简单任务，这个过程可以自动完成——在其他情况下，需要用户对零件的排列方式亲自引导仿真（即有待于更加完善的算法）。

零件上料的几何算法

在前几节中，零件的上料方式是用夹持器的手爪。在当前的生产实际中，零件大多是用一些简单机构来实现零件上料的。例如，滚筒供料机送出的零件，可以由线性驱动器直接推到一个装配单元上，这个装配单元由托盘输送系统送到一个工位。

引导仿真系统支持零件上料的仿真功能：这个实体叫做*推杆*，它可以固联在仿真系统的气缸或丝杠驱动器上。当驱动器带动推杆做直线运动时，推杆的前端面将会推动零件运动。将来，有可能将推杆作为导杆联接在输送机上，或者安装在任何要求对零件运动产生影响的地方。目前的上料方式是非常简单的，但这足以满足生产中大多数操作任务的要求。

托盘输送机的几何算法

引导仿真系统支持托盘输送系统的仿真功能。在这个系统中，托盘沿着由直线和回转单元组合的导轨运动。在导轨上某些关键位置可以安装*挡块*，当发出指令时，挡块瞬时弹出以阻挡托盘运动。此外，可以在导轨上按照用户指定的位置安装检测托盘运动的*传感器*。这种输送系统应用在很多自动化系统中。

托盘输送机、托盘供给器和托盘接收器的连接

托盘输送机可以与多种形式的分支系统相连。在两个输送机衔接的地方，用一个简单的防撞装置可将*支线*输送机上的托盘送到*主*输送机上。支线输送机上的托盘随时等待碰撞的发生。在输送机中托盘“分离”的位置，将一种称为*导向器*的装置安装到主输送机上，用它来控制托盘在交点处的运动方向。将数字I/O线连接在仿真机器人控制器上，用来读取传感器，驱动挡块和导向器。

托盘输送机的两端是*托盘供给器*和*托盘接收器*。托盘供给器是由用户建立的，其作用是在某个统计的时间间隔内供给托盘。供给的托盘可以是空的，也可以装有零件或夹具。在托盘输送机的末端，托盘以及托盘中的物品都被送入托盘接收器中。每次托盘进入托盘接收器
365 时，托盘到达时间以及托盘中的物品都被记录下来。这些所谓的*接收记录*可以由系统中任一托盘供给器的记录代替。因此，通过将第$N+1$个工序的托盘供给器记录设置成第N个工序的托盘接收器记录，就可以在仿真器中对一系列工序中的每一个工序同时进行研究。

托盘上料

上料也可以由托盘来实现：用推杆将托盘从托盘输送系统上推下，进入一个特定工序。同样，托盘也可以被推到托盘输送机上。当托盘离开或进入输送机时，自动装配零件的上料代码在各数据库中被更新。

传感器的几何算法

对各种传感器系统的仿真也是必须的，这样用户就不必花费精力为传感器在工序中的工作过程编写代码。

接近传感器

引导仿真系统支持对接近传感器和其他传感器的仿真。对于接近传感器，用户应标定传感器的最大和最小量程以及传感器的阈值。如果一个物体在接近传感器的量程和阈值之内，那么传感器就可以检测到它。为了在仿真环境下进行计算，可以在仿真环境中临时加入一条线段，这条线段位于传感器量程的最小值和最大值之间。利用碰撞算法，仿真系统可以计算出这条线段与其他CAD几何实体相交的位置，线段的长度就是传感器与最近的交点之间的距离，这个长度与实际环境相一致。将传感器到这点的距离与传感器的阈值进行比较就可以得出传感器的输出。目前我们还没有利用传感器和物体之间相交面的夹角或物体表面的反射特性，这些特性可能在以后要用到。

二维视觉系统

引导仿真系统支持Adept二维视觉系统的仿真。虽然使用Adept机器人中的AIM语言[11]进行编程，但是视觉系统的仿真工作方式与实际的二维视觉系统工作方式仍十分接近。这个视觉系统的仿真要点如下：

- 视野的形状和范围；
- 远距离聚焦模型和简单的聚焦模型；
- 执行一次扫描过程所用的时间（近似）；
- 在一个视场中出现多个零件的情况下，按零件的空间位置对零件进行排序；
- 根据零件的稳定状态分辨零件的能力；
- 对相互接触和重叠的零件的不可识别性；
- 在AIM程序中，基于视觉系统的检测结果，对机器人目标的更新能力。 366

由于视觉系统与AIM机器人编程系统密切结合，因此在仿真环境中，AIM语言的执行过程包含了视觉系统的仿真处理过程。AIM语言支持几种程序结构，可利用视觉系统对机器人引导。视觉系统根据输送系统的指令和路径很容易对零件的抓持操作进行识别。

数据结构应当始终跟踪视觉系统视场中的支承表面。对于这个表面上的所有零件，可以计算出哪些零件处于视觉系统的视场范围内。应当删除那些离镜头太远或太近的零件（例如焦点范围以外的零件）以及与相邻零件相接触的零件。对于余下的零件，应当选择那些处于稳定状态的零件，并列在一个表中。最后，当视场中出现多个零件时，应按照Adept视觉系统的排序方法对这个表进行分类，以用于仿真。

监测传感器

监测器是一种特殊的传感器。对于放在监测器前面的每个零件，监测器可以给出二进制码的输出。将引导仿真中的零件标上缺陷率，监测传感器可以搜索出具有缺陷的零件。在一些实际环境应用的传感系统中，监测传感器起着重要作用。

结论

根据本节所述，尽管一些简单的几何算法在目前的仿真系统中是适用的，但是仍然需要更多和更好的算法。尤其是当我们研究摩擦力作用大于惯性力作用的情况下，希望能够附加准静态仿真功能以预测物体的运动。这些算法可通过末端执行器或其他送进机构的各种动作，对被推入或顶入的零件进行仿真。

13.4 离线编程系统的自动子任务

在这一节中我们将简要介绍一些先进技术，这些技术能够集成到已经讨论过的离线编程系统的“基本”概念中。在工业应用的某些场合，大部分先进技术已应用于自动规划系统中。

自动确定机器人位移

应用离线编程系统能够完成许多基本操作任务，其中之一是确定工作单元的布局，以使操作臂能够到达所有给定的工作点。在仿真环境中，由编程路径和编程误差来确定正确的机器人或工件的位移要比在实际工作单元中确定上述位移快得多。自动搜索可行的机器人或工件的位置是一项先进技术，它可以进一步减少用户的负担。

自动确定位移可以通过直接搜索法或（有时）导航搜索法来计算。大多数机器人被水平安装在地面（或是天花板）上，并使得第一个旋转关节与地面垂直，所以通常情况下，不必
367 在三维空间中用划分网格的方法来寻找机器人底座的位置。这种搜索方法可以对某个判据进行优化，或者停留在最可行的机器人或工件的位置上。这种可行性可以由到达所有工作点的避碰能力来定义（也许可以给出一个更严格的定义）。一个合理的最优判据可能是可操作度的某种形式，这在第8章已经讨论过了。参考文献[12]中讨论了一种类似于可操作度的定义方法。自动确定位移的结果是使工序中的机器人能以完备的位形到达所有工作点。

避障与路径优化

在离线编程系统中自然会包括对避障路径规划[13, 14]和时间优化路径规划[15, 16]的研究。对于那些与狭小范围和狭小搜索空间有关的问题也是值得研究的。例如，在用6自由度机器人进行弧焊作业时，由几何条件可知机器人仅有5个自由度就足够了。冗余自由度的自主规划可用于机器人的避障和避奇异点。

坐标运动的自主规划

在许多弧焊作业中，具体作业过程要求在焊接过程中工件始终保持与重力矢量之间的确定关系。为此可以安装一个2或3自由度的定位系统，这个定位系统随机器人以坐标运动方式同时操作。这样一个系统可能有9个或是更多的自由度。现在一般是采用示教方法对这个系统

进行编程。自主规划系统可以对上述系统自动地进行坐标运动的综合，因此这种系统可能是相当有价值的[17, 18]。

力控制仿真

在仿真环境下，物体可用它们的表面形状来描述，因此有必要研究操作臂的力控制仿真问题。这项工作的难点在于，需要对某些表面特征进行建模，需要对动力学仿真系统进行扩展以处理各种接触条件下产生的约束问题。在这种情况下，只能够对各种力控制装配操作的可行性进行估计。

自主规划

与机器人编程中发现的几何问题相同，经常遇到的困难是规划问题和通讯问题。特别是把单一工作单元仿真推广到一组工作单元仿真时的情况。某些离散时间仿真系统可以提供这种系统的简要仿真环境[20]，但几乎没有提出规划算法。对交互操作的规划是一个困难的问题，而且这是一个研究领域[21, 22]。对于这方面的研究，离线编程系统可以作为一个理想的实验平台，并且在这个研究领域内可以通过任何一种有用的算法立即推广。 368

误差和公差的自动估计

在近期的研究工作中进行了讨论，一个离线编程系统应具有某些能力，例如可以对定位误差的产生原因以及缺陷传感器对数据的影响进行建模[23, 24]。世界模型中包括了各种误差约束和公差的信息，这个系统应可以对各种定位或装配任务的成功概率进行估计。这个系统还可以提出传感器的使用和布置的建议，以便及时修正可能出现的问题。

离线编程系统被广泛应用在当今的工业生产中，它始终可以作为机器人研究和发展过程中的基础。开发离线编程系统的主要目的是为了填补现行的显式编程系统与将来的任务级编程系统之间的空白。

参考文献

[1] J. Craig, "Issues in the Design of Off-Line Programming Systems," *International Symposium of Robotics Research*, R. Bolles and B. Roth, Eds., MIT Press, Cambridge, MA, 1988.

[2] J. Craig, "Geometric Algorithms in AdeptRAPID," *Robotics: The Algorithmic Perspective: 1998 WAFR*, P. Agarwal, L. Kavraki, and M. Mason, Eds., AK Peters, Natick, MA, 1998.

[3] R. Goldman, *Design of an Interactive Manipulator Programming Environment*, UMI Research Press, Ann Arbor, MI, 1985.

[4] S. Mujtaba and R. Goldman, "AL User's Manual," 3rd edition, Stanford Department of Computer Science, Report No. STAN-CS-81-889, December 1981.

[5] T. Lozano-Perez, "Spatial Planning: A Configuration Space Approach," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, Vol. SMC-11, 1983.

[6] B. Shimano, C. Geschke, and C. Spalding, "VAL - II: A Robot Programming Language and Control System," SME Robots VIII Conference, Detroit, June 1984.

[7] R. Taylor, P. Summers, and J. Meyer, "AML: A Manufacturing Language," *Interna-*

tional Journal of Robotics Research, Vol. 1, No. 3, Fall 1982.

[8] Adept Technology Inc., "The Pilot User's Manual," Available from Adept Technology Inc., Livermore, CA, 2001.

[9] B. Mirtich and J. Canny, "Impulse Based Dynamic Simulation of Rigid Bodies," Symposium on Interactive 3D Graphics, ACM Press, New York, 1995.

[10] B. Mirtich, Y. Zhuang, K. Goldberg, et al., "Estimating Pose Statistics for Robotic Part Feeders," Proceedings of the IEEE Robotics and Automation Conference, Minneapolis, April, 1996.

[11] Adept Technology Inc., "AIM Manual," Available from Adept Technology Inc., San Jose, CA, 2002.

[12] B. Nelson, K. Pedersen, and M. Donath, "Locating Assembly Tasks in a Manipulator's Workspace," IEEE Conference on Robotics and Automation, Raleigh, NC, April 1987.

[13] plus 1.67pt minus 1.11pt T. Lozano-Perez, "A Simple Motion Planning Algorithm for General Robot Manipulators," *IEEE Journal of Robotics and Automation*, Vol. RA-3,
369 No. 3, June 1987.

[14] R. Brooks, "Solving the Find-Path Problem by Good Representation of Free Space," *IEEE Transaction on Systems, Man, and Cybernetics*, SMC-13:190–197, 1983.

[15] J. Bobrow, S. Dubowsky, and J. Gibson, "On the Optimal Control of Robotic Manipulators with Actuator Constraints," *Proceedings of the American Control Conference*, June 1983.

[16] K. Shin and N. McKay, "Minimum-Time Control of Robotic Manipulators with Geometric Path Constraints," *IEEE Transactions on Automatic Control*, June 1985.

[17] J.J. Craig, "Coordinated Motion of Industrial Robots and 2-DOF Orienting Tables," Proceedings of the 17th International Symposium on Industrial Robots, Chicago, April 1987.

[18] S. Ahmad and S. Luo, "Coordinated Motion Control of Multiple Robotic Devices for Welding and Redundancy Coordination through Constrained Optimization in Cartesian Space," *Proceedings of the IEEE Conference on Robotics and Automation*, Philadelphia, 1988.

[19] M. Peshkin and A. Sanderson, "Planning Robotic Manipulation Strategies for Sliding Objects," IEEE Conference on Robotics and Automation, Raleigh, NC, April 1987.

[20] E. Russel, "Building Simulation Models with Simcript II.5," C.A.C.I., Los Angeles, 1983.

[21] A. Kusiak and A. Villa, "Architectures of Expert Systems for Scheduling Flexible Manufacturing Systems," IEEE Conference on Robotics and Automation, Raleigh, NC, April 1987.

[22] R. Akella and B. Krogh, "Hierarchical Control Structures for Multicell Flexible Assembly System Coordination," IEEE Conference on Robotics and Automation, Raleigh, NC, April 1987.

[23] R. Smith, M. Self, and P. Cheeseman, "Estimating Uncertain Spatial Relationships in Robotics," IEEE Conference on Robotics and Automation, Raleigh, NC, April 1987.

[24] H. Durrant-Whyte, "Uncertain Geometry in Robotics," IEEE Conference on Robotics and Automation, Raleigh, NC, April 1987.

习题

13.1 [10]简述碰撞检测、避障和无碰撞路径规划的定义。

13.2 [10]简述世界模型、路径规划仿真和动力学仿真的定义。

13.3 [10]简述自动确定机器人位移、时间最优路径和误差传递分析的定义。

13.4 [10]简述RPL、TLP和OLP的定义。

13.5 [10]简述标定、坐标运动和自主规划的定义。

13.6 [20]用图表说明近十年来计算机图形处理能力的发展情况（可以按照每10 000美元的硬件成本，每秒钟可以处理图形矢量的数目来绘制）。

13.7 [20]列出一个任务表，描述“相对于一个刚体的许多操作”，以便应用于离线编程系统。

13.8 [20]假如使用编程系统从内部处理具体的世界模型，请对这种方法的优缺点进行讨论。 370

编程习题

1. 考虑两端具有半圆形端盖的平面形状的杆，可将这种形状的物体称为“胶囊”。已知两个胶囊的位置，编写一个程序，计算它们是否接触。注意这个胶囊表面上所有的点均与一条称为“中心线”的线段等距离。
2. 在你的仿真操作臂附近引入一个胶囊形状的物体，当你沿一条路径移动操作臂时，对碰撞情况进行试验。操作臂的连杆也采用胶囊形状。写出发生任何碰撞的检测报告。
3. 如果时间和计算机配置条件允许的话，编写一个程序，用图形方式描述由胶囊形状的连杆组成的操作臂以及它们在工作空间中的干涉情况。 371

附录A　三角恒等式

刚体绕X，Y，Z轴旋转θ角的公式:

$$R_X(\theta)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix} \tag{A-1}$$

$$R_Y(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta\end{bmatrix} \tag{A-2}$$

$$R_Z(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{A-3}$$

与正弦和余弦周期特性有关的恒等式:

$$\begin{aligned}\sin\theta &= -\sin(-\theta) = -\cos(\theta+90^\circ) = \cos(\theta-90^\circ)\\ \cos\theta &= \cos(-\theta) = -\sin(\theta+90^\circ) = -\sin(\theta-90^\circ)\end{aligned} \tag{A-4}$$

θ_1和θ_2的二角和或二角差的正弦、余弦公式:

$$\begin{aligned}\cos(\theta_1+\theta_2) &= c_{12} = c_1c_2 - s_1s_2\\ \sin(\theta_1+\theta_2) &= s_{12} = c_1s_2 + s_1c_2\\ \cos(\theta_1-\theta_2) &= c_1c_2 + s_1s_2\\ \sin(\theta_1-\theta_2) &= s_1c_2 - c_1s_2\end{aligned} \tag{A-5}$$

同一个角的正弦平方与余弦平方的和等于1:

$$c^2\theta + s^2\theta = 1 \tag{A-6}$$

一个三角形的三个角分别为a, b, c，角a的对边是A，其他角和边的关系依此类推，则“余弦定理”为:

$$A^2 = B^2 + C^2 - 2BC\cos a \tag{A-7}$$

“半角正切”变换公式为:

$$\begin{aligned}u &= \tan\frac{\theta}{2}\\ \cos\theta &= \frac{1-u^2}{1+u^2}\\ \sin\theta &= \frac{2u}{1+u^2}\end{aligned} \tag{A-8}$$

矢量Q绕单位矢量K旋转θ角，由Rodriques公式得:

$$Q' = Q\cos\theta + \sin\theta(\hat{K}\times Q) + (1-\cos\theta)(\hat{K}\cdot\hat{Q})\hat{K} \tag{A-9}$$

附录B是24种角坐标系的等效旋转矩阵的定义。附录C是逆运动学恒等式。

附录B 24种角坐标系的旋转矩阵定义

12种欧拉角坐标系的定义由下式给出

$$R_{X'Y'Z'}(\alpha,\beta,\gamma)=\begin{bmatrix} c\beta c\gamma & -c\beta s\gamma & s\beta \\ s\alpha s\beta c\gamma+c\alpha s\gamma & -s\alpha s\beta s\gamma+c\alpha c\gamma & -s\alpha c\beta \\ -c\alpha s\beta c\gamma+s\alpha s\gamma & c\alpha s\beta s\gamma+s\alpha c\gamma & c\alpha c\beta \end{bmatrix}$$

$$R_{X'Z'Y'}(\alpha,\beta,\gamma)=\begin{bmatrix} c\beta c\gamma & -s\beta & c\beta s\gamma \\ c\alpha s\beta c\gamma+s\alpha s\gamma & c\alpha c\beta & c\alpha s\beta s\gamma-s\alpha c\gamma \\ s\alpha s\beta c\gamma-c\alpha s\gamma & s\alpha c\beta & s\alpha s\beta s\gamma+c\alpha c\gamma \end{bmatrix}$$

$$R_{Y'X'Z'}(\alpha,\beta,\gamma)=\begin{bmatrix} s\alpha s\beta s\gamma+c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta c\gamma-c\alpha s\gamma & s\alpha c\beta \\ c\beta s\gamma & c\beta c\gamma & -s\beta \\ c\alpha s\beta s\gamma-s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta c\gamma+s\alpha s\gamma & c\alpha c\beta \end{bmatrix}$$

$$R_{Y'Z'X'}(\alpha,\beta,\gamma)=\begin{bmatrix} c\alpha c\beta & -c\alpha s\beta c\gamma+s\alpha s\gamma & c\alpha s\beta s\gamma+s\alpha c\gamma \\ s\beta & c\beta c\gamma & -c\beta s\gamma \\ -s\alpha c\beta & s\alpha s\beta c\gamma+c\alpha s\gamma & -s\alpha s\beta s\gamma+c\alpha c\gamma \end{bmatrix}$$

$$R_{Z'X'Y'}(\alpha,\beta,\gamma)=\begin{bmatrix} -s\alpha s\beta s\gamma+c\alpha c\gamma & -s\alpha c\beta & s\alpha s\beta c\gamma+c\alpha s\gamma \\ c\alpha s\beta s\gamma+s\alpha c\gamma & c\alpha c\beta & -c\alpha s\beta c\gamma+s\alpha s\gamma \\ -c\beta s\gamma & s\beta & c\beta c\gamma \end{bmatrix}$$

$$R_{Z'Y'X'}(\alpha,\beta,\gamma)=\begin{bmatrix} c\alpha c\beta & c\alpha s\beta s\gamma-s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta c\gamma+s\alpha s\gamma \\ s\alpha c\beta & -s\alpha s\beta s\gamma+c\alpha c\gamma & -s\alpha s\beta c\gamma-c\alpha s\gamma \\ -s\beta & c\beta s\gamma & c\beta c\gamma \end{bmatrix}$$

$$R_{X'Y'X'}(\alpha,\beta,\gamma)=\begin{bmatrix} c\beta & s\beta s\gamma & s\beta c\gamma \\ s\alpha s\beta & -s\alpha c\beta s\gamma+c\alpha c\gamma & -s\alpha c\beta c\gamma-c\alpha s\gamma \\ -c\alpha s\beta & c\alpha c\beta s\gamma+s\alpha c\gamma & c\alpha c\beta c\gamma-s\alpha s\gamma \end{bmatrix}$$

$$R_{X'Z'X'}(\alpha,\beta,\gamma)=\begin{bmatrix} c\beta & -s\beta c\gamma & s\beta s\gamma \\ c\alpha s\beta & c\alpha c\beta c\gamma-s\alpha s\gamma & -c\alpha c\beta s\gamma-s\alpha c\gamma \\ s\alpha s\beta & s\alpha c\beta c\gamma+s\alpha s\gamma & -s\alpha c\beta s\gamma+c\alpha c\gamma \end{bmatrix}$$

$$R_{Y'X'Y'}(\alpha,\beta,\gamma)=\begin{bmatrix} -s\alpha c\beta s\gamma+c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta & s\alpha c\beta c\gamma+c\alpha s\gamma \\ s\beta s\gamma & c\beta & -s\beta c\gamma \\ -c\alpha c\beta s\gamma-s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta & c\alpha c\beta c\gamma-s\alpha s\gamma \end{bmatrix}$$

$$R_{Y'Z'Y'}(\alpha,\beta,\gamma)=\begin{bmatrix} c\alpha c\beta c\gamma-s\alpha s\gamma & -c\alpha s\beta & c\alpha c\beta s\gamma+s\alpha c\gamma \\ s\beta c\gamma & c\beta & s\beta s\gamma \\ -s\alpha c\beta c\gamma-c\alpha s\gamma & s\alpha s\beta & -s\alpha c\beta s\gamma+c\alpha c\gamma \end{bmatrix}$$

$$R_{Z'X'Z'}(\alpha,\beta,\gamma)=\begin{bmatrix}-s\alpha c\beta s\gamma+c\alpha c\gamma & -s\alpha c\beta c\gamma-c\alpha s\gamma & s\alpha s\beta\\ c\alpha c\beta s\gamma+s\alpha c\gamma & c\alpha c\beta c\gamma-s\alpha s\gamma & -c\alpha s\beta\\ s\beta s\gamma & s\beta c\gamma & c\beta\end{bmatrix}$$

$$R_{Z'Y'Z'}(\alpha,\beta,\gamma)=\begin{bmatrix}c\alpha c\beta c\gamma-s\alpha s\gamma & -c\alpha c\beta s\gamma-s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta\\ s\alpha c\beta c\gamma+c\alpha s\gamma & -s\alpha c\beta s\gamma+c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta\\ -s\beta c\gamma & s\beta s\gamma & c\beta\end{bmatrix}$$

12种固定角坐标系的定义由下式给出

$$R_{XYZ}(\gamma,\beta,\alpha)=\begin{bmatrix}c\alpha c\beta & c\alpha s\beta s\gamma-s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta c\gamma+s\alpha s\gamma\\ s\alpha c\beta & s\alpha s\beta s\gamma+c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta c\gamma-c\alpha s\gamma\\ -s\beta & c\beta s\gamma & c\beta c\gamma\end{bmatrix}$$

$$R_{XZY}(\gamma,\beta,\alpha)=\begin{bmatrix}c\alpha c\beta & -c\alpha s\beta c\gamma+s\alpha s\gamma & c\alpha s\beta s\gamma+s\alpha c\gamma\\ s\beta & c\beta c\gamma & -c\beta s\gamma\\ -s\alpha c\beta & s\alpha s\beta c\gamma+c\alpha s\gamma & -s\alpha s\beta s\gamma+c\alpha c\gamma\end{bmatrix}$$

$$R_{YXZ}(\gamma,\beta,\alpha)=\begin{bmatrix}-s\alpha s\beta s\gamma+c\alpha c\gamma & -s\alpha c\beta & s\alpha s\beta c\gamma+c\alpha s\gamma\\ c\alpha s\beta s\gamma+s\alpha c\gamma & c\alpha c\beta & -c\alpha s\beta c\gamma+s\alpha s\gamma\\ -c\beta s\gamma & s\beta & c\beta c\gamma\end{bmatrix}$$

$$R_{YZX}(\gamma,\beta,\alpha)=\begin{bmatrix}c\beta c\gamma & -s\beta & c\beta s\gamma\\ c\alpha s\beta c\gamma+s\alpha s\gamma & c\alpha c\beta & c\alpha s\beta s\gamma-s\alpha c\gamma\\ s\alpha s\beta c\gamma-c\alpha s\gamma & s\alpha c\beta & s\alpha s\beta s\gamma+c\alpha c\gamma\end{bmatrix}$$

$$R_{ZXY}(\gamma,\beta,\alpha)=\begin{bmatrix}s\alpha s\beta s\gamma+c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta c\gamma-c\alpha s\gamma & s\alpha c\beta\\ c\beta s\gamma & c\beta c\gamma & -s\beta\\ c\alpha s\beta s\gamma-s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta c\gamma+s\alpha s\gamma & c\alpha c\beta\end{bmatrix}$$

$$R_{ZYX}(\gamma,\beta,\alpha)=\begin{bmatrix}c\beta c\gamma & -c\beta s\gamma & s\beta\\ s\alpha s\beta c\gamma+c\alpha s\gamma & -s\alpha s\beta s\gamma+c\alpha c\gamma & -s\alpha c\beta\\ -c\alpha s\beta c\gamma+s\alpha s\gamma & c\alpha s\beta s\gamma+s\alpha c\gamma & c\alpha c\beta\end{bmatrix}$$

$$R_{XYX}(\gamma,\beta,\alpha)=\begin{bmatrix}c\beta & s\beta s\gamma & s\beta c\gamma\\ s\alpha s\beta & -s\alpha c\beta s\gamma+c\alpha c\gamma & -s\alpha c\beta c\gamma-c\alpha s\gamma\\ -c\alpha s\beta & c\alpha c\beta s\gamma+s\alpha c\gamma & c\alpha c\beta c\gamma-s\alpha s\gamma\end{bmatrix}$$

$$R_{XZX}(\gamma,\beta,\alpha)=\begin{bmatrix}c\beta & -s\beta c\gamma & s\beta s\gamma\\ c\alpha s\beta & c\alpha c\beta c\gamma-s\alpha s\gamma & -c\alpha c\beta s\gamma-c\alpha c\gamma\\ s\alpha s\beta & s\alpha c\beta c\gamma+c\alpha s\gamma & -s\alpha c\beta s\gamma+c\alpha c\gamma\end{bmatrix}$$

$$R_{YXY}(\gamma,\beta,\alpha)=\begin{bmatrix}-s\alpha c\beta s\gamma+c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta & s\alpha c\beta c\gamma+c\alpha s\gamma\\ s\beta s\gamma & c\beta & -s\beta c\gamma\\ -c\alpha c\beta s\gamma-s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta & c\alpha c\beta c\gamma-s\alpha s\gamma\end{bmatrix}$$

$$R_{YZY}(\gamma,\beta,\alpha)=\begin{bmatrix}c\alpha c\beta c\gamma-s\alpha s\gamma & -c\alpha s\beta & c\alpha c\beta s\gamma+s\alpha c\gamma\\ s\beta c\gamma & c\beta & s\beta s\gamma\\ -s\alpha c\beta c\gamma-c\alpha s\gamma & s\alpha s\beta & -s\alpha c\beta s\gamma+c\alpha c\gamma\end{bmatrix}$$

$$R_{ZXZ}(\gamma,\beta,\alpha)=\begin{bmatrix} -s\alpha c\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & -s\alpha c\beta c\gamma - c\alpha s\gamma & s\alpha s\beta \\ c\alpha c\beta s\gamma + s\alpha c\gamma & c\alpha c\beta c\gamma - s\alpha s\gamma & -c\alpha s\beta \\ s\beta s\gamma & s\beta c\gamma & c\beta \end{bmatrix}$$

$$R_{ZYZ}(\gamma,\beta,\alpha)=\begin{bmatrix} c\alpha c\beta c\gamma - s\alpha s\gamma & -c\alpha c\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta \\ s\alpha c\beta c\gamma + c\alpha s\gamma & -s\alpha c\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta \\ -s\beta c\gamma & s\beta s\gamma & c\beta \end{bmatrix}$$

附录C 逆运动学公式

下述方程

$$\sin\theta = a \tag{C-1}$$

有两个解为

$$\theta = \pm \text{A}\tan 2(\sqrt{1-a^2}, a) \tag{C-2}$$

同样，已知

$$\cos\theta = b \tag{C-3}$$

有两个解为

$$\theta = \text{A}\tan 2(b, \pm\sqrt{1-b^2}) \tag{C-4}$$

联立（C-1）和（C-3）得到唯一解为

$$\theta = \text{A}\tan 2(a, b) \tag{C-5}$$

超越方程

$$a\cos\theta + b\sin\theta = 0 \tag{C-6}$$

有两个解为

$$\theta = \text{A}\tan 2(a, -b) \tag{C-7}$$

和

$$\theta = \text{A}\tan 2(-a, b) \tag{C-8}$$

方程

$$a\cos\theta + b\sin\theta = c \tag{C-9}$$

由（4.5）节的半角正切变换公式解得

$$\theta = \text{A}\tan 2(b, a) \pm \text{A}\tan 2(\sqrt{a^2+b^2-c^2}, c) \tag{C-10}$$

方程组

$$\begin{aligned} a\cos\theta - b\sin\theta &= c \\ a\sin\theta + b\cos\theta &= d \end{aligned} \tag{C-11}$$

由（4.4）节公式解得

$$\theta = \text{A}\tan 2(ad-bc, ac+bd) \tag{C-12}$$

部分习题答案

第2章　空间描述和变换习题

2.1）

$$R = ROT(\hat{x},\phi)ROT(\hat{z},\theta)$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\phi & -S\phi \\ 0 & S\phi & C\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 \\ C\phi S\theta & C\phi C\theta & -S\phi \\ S\phi S\theta & S\phi C\theta & C\phi \end{bmatrix}$$

2.12）速度是一个“自由矢量”，它仅受旋转影响，而不受平移影响:

$${}^{A}V = {}^{A}_{B}R\, {}^{B}V = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{bmatrix}$$
$${}^{A}V = [-1.34 \;\; 22.32 \;\; 30.0]^{T}$$

2.27）

$${}^{A}_{B}T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.33）

$${}^{B}_{C}T = \begin{bmatrix} -0.866 & -0.5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ -0.5 & 0.866 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

第3章　操作臂运动学习题

3.1）

α_{i-1}	a_{i-1}	d_i
0	0	0
0	L_1	0
0	L_2	0

$$
{}^0_1T=\begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & 0 \\ S_1 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^1_2T=\begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & L_1 \\ S_2 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^2_3T=\begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & L_2 \\ S_3 & C_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^0_3T={}^0_1T\,{}^1_2T\,{}^2_3T=\begin{bmatrix} C_{123} & -S_{123} & 0 & L_1C_1+L_2C_{12} \\ S_{123} & C_{123} & 0 & L_1S_1+L_2S_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

式中

$$
C_{123}=\cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3)
$$
$$
S_{123}=\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3)
$$

3.8）当$\{G\}=\{T\}$时，有

$$
{}^B_WT\,{}^W_TT={}^B_ST\,{}^S_GT
$$

因此

$$
{}^W_TT={}^B_WT^{-1}\,{}^B_ST\,{}^S_GT
$$

第4章 操作臂逆运动学

4.14）否。Pieper的方法给出了任何3自由度操作臂封闭形式的解（参见Pieper有关这方面的所有论文）。

4.18）2

4.22）1

第5章 速度和静力习题

5.1）坐标系{0}的雅可比矩阵为

$$
{}^0J(\theta)=\begin{bmatrix} -L_1S_1-L_2S_{12} & -L_2S_{12} \\ L_1C_1+L_2C_{12} & L_2C_{12} \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{DET}({}^0J(\theta)) &= -(L_2C_{12})(L_1S_1+L_2S_{12})+(L_2S_{12})(L_1C_1+L_2C_{12}) \\
&= -L_1L_2S_1C_{12}-L_2^2S_{12}C_{12}+L_1L_2C_1S_{12}+L_2^2S_{12}C_{12} \\
&= L_1L_2C_1S_{12}-L_1L_2S_1C_{12}=L_1L_2(C_1S_{12}-S_1C_{12}) \\
&= L_1L_2S_2
\end{aligned}
$$

所以，当你以${}^3J(\theta)$开始，结果是相同的，即奇异位形为$\theta_2=0°$或180°。

5.8）第2个连杆的雅可比矩阵为

$$^3J(\theta)=\begin{bmatrix} L_1S_2 & 0 \\ L_1C_2+L_2 & L_2 \end{bmatrix}$$

存在一个各向同性点，如果

$$^3J=\begin{bmatrix} L_2 & 0 \\ 0 & L_2 \end{bmatrix}$$

因此

$$L_1S_2=L_2$$
$$L_1C_2+L_2=0$$

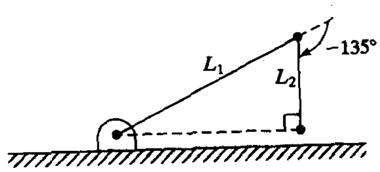
因为，$S_2^2+C_2^2=1$，因此 $\left(\frac{L_2}{L_1}\right)^2+\left(\frac{-L_2}{L_1}\right)^2=1$

即 $L_1^2=2L_2^2 \to L_1=\sqrt{2}L_2$

根据这个条件，$S_2=\frac{1}{\sqrt{2}}=\pm0.707$

和$C_2=-0.707$

所以，如果 $L_1=\sqrt{2}L_2$，存在一个各向同性点，并且，当$\theta_2=\pm135°$时，存在一个各向同性点。



此时，操作臂在这个位形下像一个笛卡儿操作臂一样。

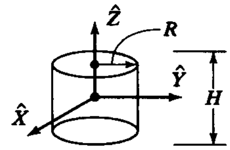
5.13）

$$\tau={}^0J^T(\theta)\,{}^0F$$
$$\tau=\begin{bmatrix} -L_1S_1-L_2S_{12} & L_1C_1+L_2C_{12} \\ -L_2S_{12} & L_2C_{12} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\tau_1=-10S_1L_1-10L_2S_{12}$$
$$\tau_2=-10L_2S_{12}$$

第6章　操作臂动力学习题

6.1）应用式（6.17），但按照极坐标形式写出，因为这种描述形式较方便。例如，对于I_{zz}，

$$I_{zz}=\int_{-H/2}^{H/2}\int_0^{2\pi}\int_0^R(x^2+y^2)\rho\ r\ dr\ d\theta\ dz$$
$$x=R\cos\theta,\qquad y=R\sin\theta,\qquad x^2+y^2=R^2(r^2)$$
$$I_{zz}=\int_{-H/2}^{H/2}\int_0^{2\pi}\int_0^R\rho r^3dr\ d\theta\ dz$$



$$I_{zz}=\frac{\pi}{2}R^4H\rho,\ \text{VOLUME}=\pi r^2H$$

$$\therefore\quad \text{Mass}=M=\rho\pi r^2H \qquad \therefore\quad \boxed{I_{zz}=\frac{1}{2}MR^2}$$

同样（仅难度较大）有

$$\boxed{I_{xx}=I_{yy}=\frac{1}{4}MR^2+\frac{1}{12}MH^2}$$

由对称性（或通过积分），

$$\boxed{I_{xy}=I_{xz}=I_{yz}=0}$$

$$^{c}I=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}MR^2+\frac{1}{12}MH^2 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{4}MR^2+\frac{1}{12}MH^2 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}MR^2\end{bmatrix}$$

6.12） $\theta_1(t)=Bt+ct^2$，因此

$$\dot{\theta}_1=B+2ct,\ddot{\theta}=2c$$

因此

$$^1\dot{\omega}_1=\ddot{\theta}_1\hat{z}_1=2c\hat{z}_1=\begin{bmatrix}0\\0\\2c\end{bmatrix}$$

$$^1\dot{\upsilon}_{c1}=\begin{bmatrix}0\\0\\2c\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\\dot{\theta}_1\end{bmatrix}\otimes\left(\begin{bmatrix}0\\0\\\dot{\theta}_1\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}0\\4c\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2\dot{\theta}_1^2\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$^1\dot{\upsilon}_{c1}=\begin{bmatrix}-2(B+2ct)^2\\4c\\0\end{bmatrix}$$

6.18）对于任一合理的 $F(\theta,\dot{\theta})$，存在如下特性：关节i的摩擦力（或力矩）仅取决于关节i的速度，即，

$$F(\theta,\dot{\theta})=[f_1(\theta,\dot{\theta}_1) \quad f_2(\theta,\dot{\theta}_2) \quad \cdots f_N(\theta,\dot{\theta}_N)]^T$$

同样，每一个 $f_i(\theta,\dot{\theta})$ 应是“被动的”，即这个函数应当位于第一和第三象限。



**这是1989年10月17日黄昏时7.0级地震的记录结果。

第7章 轨迹的生成习题

7.1）要求三次多项式曲线连接一个起始点、两个中间点和一个目标点——即对每一个关节有3个点，总共有18条三次多项式曲线。每个三次多项式有4个系数，因此需要存储72个系数。

7.17）通过求导，

$$\dot{\theta}(t)=180t-180t^2$$
$$\ddot{\theta}(t)=180-360t$$

然后，在t =0和t =1时进行预测估计，有

$$\theta(0)=10 \quad \dot{\theta}(0)=0 \quad \ddot{\theta}(0)=180$$
$$\theta(1)=40 \quad \dot{\theta}(1)=0 \quad \ddot{\theta}(1)=-180$$

第8章 操作臂的机械设计习题

8.3）应用式（8.1），有

$$L=\sum_{i=1}^{3}(a_{i-1}+d_i)=(0+0)+(0+0)+(0+(U-L))=U-L$$

$$W=\frac{4}{3}\pi U^3-\frac{4}{3}\pi L^3=\frac{4}{3}\pi(U^3-L^3)\left\{\begin{array}{l}\text{a}\\ \text{“hollow” 一个“空心”球}\\ \text{sphere}\end{array}\right.$$

$$\therefore Q_L=\frac{U-L}{\sqrt[3]{\frac{4}{3}\pi(U^3-L^3)}}$$

8.6）由式（8.14），

$$\frac{1}{K_{TOTAL}}=\frac{1}{1000}+\frac{1}{300}=4.333\times10^{-3}$$

$$\therefore \boxed{K_{TOTAL}=230.77\frac{\text{NTM}}{\text{RAD}}}$$

8.16）由式（8.15），

$$K=\frac{G\pi d^4}{32L}=\frac{(0.33\times7.5\times10^{10})(\pi)(0.001)^4}{(32)(0.40)}=\boxed{0.006135\frac{\text{NTM}}{\text{RAD}}}$$

这是非常薄的，因为它的直径只有1mm!

第9章 操作臂的线性控制习题

9.2）由式（9.5），

$$s_1 = -\frac{6}{2\times 2} + \frac{\sqrt{36-4\times 2\times 4}}{2\times 2} = -1.5+0.5=-1.0$$
$$s_2 = -1.5-0.5=-2.0$$

∴

$$quadx(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{-2t} \quad 和 \quad \dot{x}(t) = -c_1e^{-t} - 2c_2e^{-2t}$$

$$Att=0 \quad x(0)=1=c_1+c_2 \qquad (1)$$

$$\dot{x}(0)=0=-c_1-2c_2 \qquad (2)$$

将式（1）和式（2）相加得

$$1=-c_2$$

因此$c_2=-1$和$c_1=2$。

$$\therefore \boxed{x(t)=2e^{-t}-e^{-2t}}$$

9.10）应用式（8.24），假定材料为铝，有

$$K=\frac{(0.333)(2\times 10^{11})(0.05^4-0.04^4)}{(4)(0.50)}=123\,000.0$$

参考图9-13，等效质量为(0.23)(5)=1.15kg。

因此

$$W_{res}=\sqrt{k/m}=\sqrt{\frac{123\,000.0}{1.15}}\cong \boxed{327.04\frac{\text{rad}}{\text{sec}}}$$

这个速度非常高——因此设计者在设计时可能出了错误，这个连杆的振动代表了这个系统的最低阶未建模共振!

9.13）同习题9.12，有效刚度为K=32 000。这里，有效惯量为I =1+(0.1)(64)=7.4

$$\therefore W_{res}=\sqrt{\frac{32\,000}{7.4}}\cong 65.76\frac{\text{rad}}{\text{sec}}\cong \boxed{10.47\text{Hz}}$$

第10章 操作臂的非线性控制习题

10.2）令 $\tau=\alpha\tau'+\beta$

$$\alpha=2 \qquad \beta=5\theta\dot{\theta}-13\dot{\theta}^3+5$$

和 $\tau'=\ddot{\theta}_D+K_v\dot{e}+K_pe$

式中 $e=\theta_D-\theta$

和

$$K_p=10$$
$$K_v=2\sqrt{10}$$

10.10）令$f=\alpha f'+\beta$

且$\alpha=2, \beta=5x\dot{x}-12$

和$f'=\ddot{X}_D+k_v\dot{e}+k_p e, \qquad e=X_D-X$

$k_p=20, k_v=2\sqrt{20}$

第11章 操作臂的力控制习题

11.2）对于这个操作任务，所求的人工约束应为

$V_z=-a_1$	$F_x=0$ $F_y=0$ $N_x=0$ $N_y=0$ $N_z=0$

式中α_1是插入速度。

11.4）应用式（5.105）以及坐标系$\{A\}$和$\{B\}$的逆矩阵。首先求${}^B_AT$，因此逆阵为${}^A_BT$：

$$
{}^B_AT=\begin{bmatrix} 0.866 & 0.5 & 0 & -8.66 \\ -0.5 & 0.866 & 0 & 5.0 \\ 0 & 0 & 1 & -5.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

这里，

$$
{}^BF={}^B_AR\,{}^AF=[1\ \ 1.73\ \ -3]^T
$$
$$
{}^BN={}^BP_{AORG}\otimes{}^BF+{}^B_AR\,{}^AN=[-6.3\ \ -30.9\ \ -15.8]^T
$$
$$
\therefore\ {}^BF=[1.0\ \ 1.73\ \ -3\ \ -6.3\ \ -30.9\ \ -15.8]^T
$$

索 引

注：索引页码为英文原书页码，即本书页边所标页码。

Acceleration of a rigid body（刚体的加速度），166-167
angular acceleration（角加速度）， 167
linear acceleration（线加速度）， 166-167
Accuracy（精度）， 233
Actuation schemes（驱动方式）， 244-247
actuator location（驱动器布局）， 244-245
reduction/transmission systems（减速/传动系统），245-247
Actuator location（驱动器布局）:
direct-drive configuration（直接驱动结构）， 244-245
speed-reduction system（减速系统）， 245
transmission system（传动系统）， 245
Actuator positions（驱动器位置）， 77
Actuator space（驱动器空间），77
Actuator vectors（驱动器矢量），77
Actuators（驱动器），278-279
joint（关节），9脚注
and stiffness（刚度），250-252
vane（气动），250-251
Adaptive control（自适应控制），311-312
Adept 2-D vision system（Adept二维视觉系统），366-367
Affixments（附件），345
AL language（AL语言），341，345
Algebraic solution（代数解法），106，109-112
by reduction to polynomial（通过化简为多项式），113-114
Algorithms（算法）:
control（控制），11-12
nonlinear control（非线性控制），12-13
Alternating current (AC) motors and stepper motors（交流电机与步进电机），252
Angle sets（角坐标系），144
Angle-axis representation（轴角坐标系表示方法），218-219
Angles（角）:
Euler（欧拉角），44
joint（关节），5，66，185
yaw（偏转角），41
Angle-set conventions（角坐标系表示法），46，374-376
Angular acceleration（角加速度），167
Angular velocity（角速度），141-144
representations of（描述方法），142-143
Angular-velocity matrix（角速度矩阵），142
Angular-velocity vector（角速度矢量），137-138，142
gaining physical insight concerning（建立关于……的物理概念），142-143
Anthropomorphic manipulator（拟人操作臂），235
Antialiasing（抗混叠），278
AR-BASIC (American Cimflex)（AR-BASIC语言（美国Cimflex）），341
Arm signature style calibration（机械臂特征标定规范），357
Armature（电枢），278
ARMII manipulator arm（ARMII（Advanced Research Manipulator II）型操作臂），288
Articulated manipulator（铰接型操作臂），235
Artificial constraints（人工约束），320-321
Assembly（装配），3
Assembly strategy（装配策略），321
Automated subtasks in OLP systems: automatic assessment of errors and tolerances（离线编程系统的自动子任务：误差和公差的自动估计），369
automatic planning of coordinated motion（坐标运动的自动规划），368
automatic robot placement（自动确定机器人位移），367-368
automatic scheduling（自主控制），368
collision avoidance and path optimization（避障与路径优化），368
force-control simulation（力控制仿真），368
Automatic collision detection（自动碰撞检测），357
Automation，fixed（自动化装备，专用的），3，14

Autonomous system（自治系统），305
Azimuth（方位角），7

Back emf constant（反电势常数），279
Backlash（间隙），245
Ball-bearing screws（滚珠丝杠），246-247
Base frame (B)（基坐标系），5，89，125
Bearing flexibility（轴承的变形），250
Belts（平带），246
  and stiffness（刚度），249
BIBO stability（BIBO稳定性），276
Bolted joints，and hysteresis（螺栓联接和滞后），254
Bottom-up programming（自下而上的编程方法），348
Bounded-input，bounded-output（BIBO）stability（有界输入－有界输出（BIBO）稳定性），276
Brushless motors（无刷电机），252

Cables（电缆），246
Calculation，kinematic（计算，运动学），91-92
Calibration matrix（标定矩阵），253
Calibration techniques（标定技术），127
Candidate Lyapunov functions（选取李雅普诺夫函数），305
Cartesian configuration space torque equation（笛卡儿形位空间中的力矩方程），187-188
Cartesian manipulator（笛卡儿操作臂），234-235
Cartesian mass matrix（笛卡儿质量矩阵），186
Cartesian motion（笛卡儿运动），218
Cartesian paths，geometric problems with（笛卡儿路径，几何问题），219-222
  high joint rates near singularity（近奇异点附近的高关节速率），220-221
  intermediate points unreachable（不可达的中间点），220
  start and goal reachable in different solutions（不同解下的可达起点和终点），221-222
Cartesian space（笛卡儿空间），6，76-77
  formulating manipulator dynamics in（建立操作臂动力学方程），185-188
Cartesian state-space equation（笛卡儿状态空间方程），185-187
Cartesian trajectory generation（笛卡儿轨迹生成），10
Cartesian-based control systems（基于笛卡儿空间的控制系统），307-311
  Cartesian decoupling scheme（笛卡儿解耦方案），310-311
  defined（定义），308
  intuitive schemes of Cartesian control（笛卡儿空间的直接控制方法），309-310
  joint-based schemes compared with（与基于关节空间控制方法的比较），307-309
Cartesian-space paths，generation（笛卡儿空间路径，生成），223-224
Cartesian-space schemes（笛卡儿空间规划方法），216-219
  Cartesian straight-line motion（笛卡儿直线运动），217-219
Cayley's formula for orthonormal matrices（正交矩阵的凯莱公式），40
Centrifugal force（离心力），181
Chain drives（链传动），246
Characteristic equation（特征方程），265
Cincinatti Milacron（辛辛纳提 Milacron），238
Closed-form dynamic equations，example of（封闭形式的动力学方程，如），177-180
Closed-form solutions（封闭形式解），106
Closed-form-solvable manipulators（封闭解操作臂），114
Closed-loop stiffness（闭环刚度），272
Closed-loop structures（闭环结构），242-244
  Grübler's formula（Grübler公式），243
  Stewart mechanism（Stewart机构），243-244
Closed-loop system（闭环系统），264
Collision-free path planning（无碰撞路径规划），225
Co-located sensor and actuator pairs（并置的传感器与驱动器组合），252
Complex roots（复根），266，267-269
Computation（计算），52-54
Computed points（计算点），127
Computed-torque method（计算力矩法），290
Concatenating link transformations（连续的连杆变换），76
Configuration-space equation（形位空间方程），181-182
Constraints（约束）:
  artificial（人工的），320-321
  force（力的），320-321
  natural（自然的），319-321
  position（位置的），320-321
  spatial（空间的），202
Continuous vs. discrete time control（连续时间控制与离散时间控制），277-278
Control algorithm（控制算法），11-12

Control gains（控制增益），272
Control law（控制律），271
Control theory（控制理论），3
Control-law partitioning（控制律的分解），273-275
Coriolis force（哥氏力），181
Coulomb friction（库仑摩擦），188-189，293
Coulomb-friction constant（库仑摩擦常数），188
Critical damping（临界阻尼），266，291
Cubic polynomials（三次多项式），203-205
  for a path with via points（具有中间点的路径），205-209
Current amplifier（电流放大器），279-280
Cycle time（循环时间），233
Cylindrical configuration（柱坐标位形），236-237

Damped natural frequency（阻尼振动固有频率），268
Damping，effective（有效阻尼），280
Damping ratio（阻尼比），268
Deburring（去毛刺），318
DEC LSI-11 computer（DEC LSI-11 计算机），284-285
Decoupling（解耦），295
Decoupling control，approximations（解耦控制，近似方法），303
Degrees of freedom（自由度），5，231-232
Denavit-Hartenberg notation（Denavit-Hartenberg符号），67
Denavit-Hartenberg parameters（Denavit-Hartenberg 参数），127
Descriptions（描述），19-23
  defined（定义），19
  of a frame（坐标系），22-23
  of an orientation（方位），20-22
  of a position（位置），20
Dextrous workspace（灵巧工作空间），102
Differentiation（微分）:
  numerical（数值的），252
  of position vectors（位置矢量），136-137
Direct current (DC) brush motors（直流有刷电动机），251-252
Direct kinematics（正（向）运动学，运动学正问题），101
Direct-drive configuration（直接驱动位形），244-245
Direct-drive manipulator（直接驱动操作臂），281
Direction cosines（方向余弦），22
Discrete-time control（离散时间控制），277-278，297
Disturbance rejection（抗干扰），276-277，278
  addition of an integral term（附加积分项），277
  PID control law（PID控制律），277
  steady-state error（稳态误差），276
Draper Labs（Draper实验室），333
Dual-rate computed-torque implementation（双速率计算力矩方法），298-299
Dynamic emulation（动力学仿真），358
Dynamic equations（动力学方程）:
  configuration-space equation（形位空间方程），181-182
  state-space equation（状态空间方程），180-181
  structure of（结构），177-180
Dynamic simulation（动力学仿真），189-190
Dynamically simple manipulator（动力学上的简单操作臂），191
Dynamics（动力学），9-10
  defined（定义），9
Dynamics of manipulators（操作臂动力学），165-200
  acceleration of a rigid body（刚体加速度），166-167
  computation（计算），190-192
  efficiency（效率），190-191
  efficiency of closed forms vs. iterative form（封闭形式与迭代形式的效率），190-191
  efficient dynamics for simulation（有效的动力学仿真），191
  memorization scheme（存储方案），192
  dynamic equations，structure of（动力学方程，结构），177-180
  dynamic simulation（动力学仿真），189-190
  Euler's equation（欧拉方程），171-172
  iterative Newton-Euler dynamic formulation（牛顿-欧拉迭代动力学公式），173-176
  iterative vs. closed form（迭代形式与封闭形式），176-177
  Lagrangian dynamic formulation（拉格朗日动力学公式），182-185
  mass distribution（质量分布），167-171
  Newton's equation（牛顿方程），171-172
  nonrigid body effects，inclusion of（计及非刚体效应），188-189
Dynamics of mechanisms（机构动力学），165

Effective damping（有效阻尼），280
Effective inertia（有效惯量），280
Efficiency（效率）:
  of closed forms vs. iterative form（封闭形式与迭代形

式)，190-191
efficient dynamics for simulation（有效的动力学仿真)，191
historical note concerning（关于……研究简介)，190-191
Elbow manipulator（肘型操作臂)，235
Elevation（仰角)，7
End-effector（末端执行器)，5
End-of-arm tooling（工具端)，230
Equivalent angle-axis representation（等效轴角坐标系表示法)，46-50
Error detection/recovery（误差检测及校正)，349-350
Error space（误差空间)，275
Euler angles（欧拉角)，44
Z-Y-X，43-45
Z-Y-Z，45-46
Euler integration（欧拉积分)，189
Euler parameters（欧拉参数)，50-51
Euler's equation（欧拉方程)，171-172
Euler's formula（欧拉公式)，267
Euler's theorem on rotation（欧拉旋量定理)，46脚注
Event monitors（事件监测)，346
Explicit programming languages（显式编程语言)，341-342

Feedback（反馈)，263
Feedforward nonlinear control（非线性前馈控制)，297-298
Fictitious joints（虚拟关节)，232，238
Finite-element techniques（有限元法)，250
Fixed angles，X-Y-Z（X-Y-Z固定角坐标系)，41-43
Fixed automation（专用的自动化装备)，3，14
Flexible bands（柔性带)，246
Flexible elements in parallel and in series（并联和串联的柔性元件)，247
Flexure（挠曲变形)，253
Foil gauges（应变计)，254
Force constraints（力约束)，320-321
Force control（力控制)，13
hybrid position/force control problem（力/位混合控制问题)，323-324，328-333
Cartesian manipulator aligned with constraint frame {C}（约束坐标系{C}中的笛卡儿操作臂)，328-330
general manipulator（通用操作臂)，330-332
variable stiffness，adding（附加可变刚度)，332-333
industrial robots，application to assembly tasks（用于装配作业的工业机器人)，318
industrial-robot control schemes（工业机器人控制方法)，333-335
compliance through softening position gains（通过降低位置增益实现的柔顺性)，333-334
force sensing（力觉)，334-335
passive compliance（被动柔顺性)，333
of manipulators（操作臂)，317-338
of a mass-spring system（质量-弹簧系统)，324-328
partially constrained tasks，framework for control in（局部约束任务，控制坐标系)，318-323
Force domain，Jacobians in（力域，雅可比)，156-157
Force sensing（力检测，力觉)，253-254，334-335
design issues（设计问题)，253-254
flexure（挠曲变形)，253
hysteresis（滞后)，253-254
limit stops（限位挡块)，253-254
overload protection（过载保护)，253
Force-control law（力控制法则)，13
Force-moment transformation（力-力矩变换)，158-159
Force-sensing fingers（带有力觉的手指)，253
Forward kinematics（正（向）运动学)，4-6
4-quadrant arc tangent（4象限反正切)，43脚注
Frames（坐标系)，4，34
affixing to links，convention for（附加到连杆，规定)，67-73
base（基座)，5
compound（混合)，34-35
defined（定义)，23
description of（描述)，22-23
graphical representation of（图形表示)，23
with standard names（标准命名)，89-91
tool（工具)，5
Free vectors（自由矢量):
defined（定义)，51-52
transformation of（变换)，51-52
Friction（摩擦)，245

Gantry robots（龙门式机器人)，234
Gear ratio（齿轮传动比)，245，246
Gears（齿轮)，245
and stiffness（刚度)，248-249
General frames，mappings involving（一般坐标系，映射)，27-29
Generalizing kinematics（广义运动学)，91

Geometric solution（几何解），106，112-113
Geometric types（几何类型），344
GMF S380（日本Fanuc公司的GMF S380机器人），340
Goal frame (*G*)（目标坐标系(G)），91，125
Gravity compensation，addition（重力补偿，附加），302-303
Grinding（磨削），318
Grübler's formula （Grübler公式），243
Guarded move（运动监控），334

High repeatability and accuracy（高重复精度与定位精度），233
Higher-order polynomials（高阶多项式），209-210
Homogeneous transform（齐次变换），28 - 29，34
Hybrid control（混合控制），13
Hybrid position/force control problem（力/位混合控制问题），328-333
  Cartesian manipulator aligned with constraint frame(*C*)（约束坐标系{C}中的笛卡儿操作臂），328-330
  general manipulator（一般操作臂），330-332
  variable stiffness，adding（可变刚度，附加），332-333
Hybrid position/force controller（力/位混合控制器），317
Hydraulic cylinders（液压缸），250-251
Hysteresis，eliminating（消除滞后），254

Independent joint control（独立关节控制），264
Index pulse（特征脉冲），252
Individual-joint PID control（独立关节PID控制），301-302
Industrial robot（工业机器人）：
  applications（应用），1-3
  as automation trend in manufacturing process（制造业自动化的发展趋势），1
  growth in use of（使用量增长），1
Industrial-robot control schemes（工业机器人控制方法），333-335
  compliance through softening position gains（通过降低位置增益实现的柔顺性），333-334
  force sensing（力觉），334-335
  passive compliance（被动柔顺性），333
Industrial -robot control systems（工业机器人控制系统），301-303
  decoupling control，approximations of（解耦控制，近似方法），303
  gravity compensation，addition of（重力补偿，附加），302-303
  individual-joint PID control（独立关节PID控制），301-302
Industrial-robot controller，architecture of（工业机器人控制器，结构），284-285
Inertia（惯量）:
  effective（有效的），280
  mass moments of（惯量矩），168
  mass products of（惯量积），168-169
  moment of（矩），167
  pendulum（摆），171
  principal moments of（主矩），169
  tensor（张量），167，171
Inertia ellipsoid（惯性椭球），241
Initial conditions（初始条件），265
Inspector（监测器），367
Instantaneous axis of rotation（瞬时转动轴），143
Interactive languages（交互式语言），356
Interpretations（解释），34
Intuitive schemes of Cartesian control（笛卡儿空间的控制直接方法），309-310
Inverse kinematics（逆（向）运动学），6-7，101
Inverse manipulator kinematics（操作臂逆（向）运动学），101-134
  algebraic solution by reduction to polynomial（通过化简为多项式的代数解法），114-117
  algebraic vs. geometric solution（代数解法与几何解法），109-113
  computation（计算），127-128
  examples of（例子），117-125
    PUMA 560 (Unimation)（PUMA 560 (Unimation)型机器人），117-121
    Yasukawa Motoman L-3（Yasukawa Motoman L-3型机器人），121-125
  manipulator subspace（操作臂子空间），107-109
  Pieper's solution when three axes intersect（三轴相交时的Pieper解法），114-117
  solvability（可解性），101-106
    existence of solutions（解的存在性），102-103
    method of solution（解法），105-106
    multiple solutions（多重解），103-105
Inverse-Jacobian controller（逆雅可比控制器），309
Inverse-kinematic formulas（逆运动学公式），377
Iterative Newton-Euler dynamic formulation（牛顿-欧拉迭代动力学公式），173-180

closed-form dynamic equations（封闭形式的动力学方程），177-180
dynamics algorithm（动力学算法），175-176
inclusion of gravity forces in（计及重力），176
force/torque acting on a link（作用在连杆上的力/力矩），174
inward iterations（向内迭代），174-175
outward iterations（向外迭代），173-174

Jacobian matrix（雅可比矩阵），135 脚注
Jacobian transpose（雅可比转置），157
Jacobians（雅可比），7，135 -164
defined（定义），149-150
in the force domain（在力域内），156-157
frame of reference，changing（参考坐标系的变换），151
velocity "propagation" from link to link（连杆间的速度"传递"），144-149
JARS（JARS语言），341
Joint actuators（关节驱动器），9
Joint angles（关节角），5，66，185
Joint axes（关节轴），64
Joint offset（关节偏距），5
Joint space（关节空间），6，76-77，185
Joint torques（关节力矩），9
Joint variable（关节变量），67
Joint vector（关节矢量），76
Joint-based control schemes（基于关节空间的控制方法），307-309
Jointed manipulator（关节型操作臂），235
Joints，（关节）5
bolted（螺栓联接），254
press-fit（压配合），254
prismatic（移动式），5，63
revolute（转动式），5，63
welded（焊接），254
Joint-space paths，generation of（关节空间路径，生成），222-223
Joint-space schemes（关节空间的规划方法），203-216
cubic polynomials（三次多项式），203-205
cubic polynomials for a path with via points（具有中间点路径的三次多项式），205-209
higher-order polynomials（高阶多项式），209-210
linear function with parabolic blends（与抛物线拟合的线性函数），210-212
for a path with via points（具有各中间点的路径），212-216

KAREL (GMF Robotics)（KAREL(GMF机器人)），341
Khatib，O.，332
Kinematic emulation（运动学仿真），357-358
Kinematics，4-6 （运动学）
calculating（计算），91-92
defined（定义），4，62
link description（连杆描述），62-65
link-connection description（连杆连接描述），65-67
of PUMA 560 (Unimation)（PUMA 560 (Unimation)机器人），77-83
of two industrial robots（两个工业机器人），77-89
of Yasukawa Motoman L-3（Yasukawa Motoman L-3机器人（日本）），83-89
Kinetically simple manipulator(运动学上的简单操作臂)，191

Lagrangian，defined（拉格朗日函数，定义），183
Lagrangian dynamic formulation（拉格朗日动力学公式），182-185
Language translation to target system（翻译成目标系统的语言），359
Laplace transforms（拉普拉斯变换），265
Lead screws（普通丝杠），246-247
Leading subscripts/superscripts，in notation（左下标/左上标，符号），16
Length sum（长度和），240
L'Hópital's rule（洛必达法则），270
Limit stops（限位挡块），253-254
Line of action（作用线），51-52
Line vectors，defined（线矢量，给定的），51-52
Linear acceleration（线加速度），166-167
Linear control of manipulators（操作臂线性控制），262-289
closed-loop control（闭环控制），263-264
continuous vs. discrete time control（连续时间控制与离散时间控制），277-278
control-law partitioning（控制律分解），273-275
disturbance rejection（抗干扰），276-277
feedback（反馈），263
industrial-robot controller，architecure of（工业机器人控制器，结构），284-285
second-order linear systems（二阶线性系统），264-271
characteristic equation（特征方程），265

complex roots（复根），266，267-269
control of（控制），271-273
initial conditions（初始条件），265
Laplace transforms（拉普拉斯变换），265
poles（极点），265
real and equal roots（两个相等的实根），267，269-271
real and unequal roots（两个不相等的实根），266-267
single joint（单关节），
modeling/controlling（建模/控制），278-284
effective inertia（有效惯量），280
estimating resonant frequency（估计共振频率），282-283
motor-armature inductance（电机电枢感抗），279-280
unmodeled flexibility（未建模柔性），281-282
trajectory-following control（轨迹跟踪控制），275
Linear function with parabolic blends（与抛物线拟合的线性函数），210-212
for a path with via points（具有中间点的路径），212-216
Linear position control（线性位置控制），11-12
Linear velocity（线速度），138-139
simultaneous rotational velocity（与角速度同时存在），140-141
Linear-control systems（线性控制系统），262
Linearizing and decoupling control law（线性化解耦控制律），295
Linearizing control law（线性控制方法），291
Link length（连杆长度），64
Link offset（连杆偏距），66
Link parameters（连杆参数），67
of a three-link planar manipulator（三连杆平面操作臂），71
Link transformations（连杆变换）:
concatenating（连续的），76
derivation of（推导），73-76
Link twist（连杆转角），64-65
Link-connection description（连杆连接的描述），65-67
first and last links in the chain（连杆链中的首尾连杆），66-67
intermediate links in the chain（连杆链中的中间连杆），66
link parameters（连杆参数），67
Link-frame assignment（连杆坐标系布局），72
Links（连杆），5
convention for affixing frames to（对附加坐标系的规定），67-73
first and last links in the chain（连杆链中的首尾连杆），68
intermediate links in the chain（连杆链中的中间连杆），68
link parameter summary（连杆参数的归纳），69
link-frame attachment procedure（建立连杆坐标系的步骤），69
and stiffness（刚度），249-250
Load capacity（负载能力），233
Local linearization（局部线性化），291
Locally degenerate mechanism （机构局部退化），9
Lower pair（低副），62-63
Low-pass filter（低通滤波器），279-280
Lumped models（集中质量模型），282-283
Lyapunov stability analysis（李雅普诺夫稳定性分析），303-307
Lyapunov's method（李雅普诺夫方法），290
Lyapunov's second (direct) method（第二类李雅普诺夫方法（直接法）），304

Manipulability measure（可操作度），241
Manipulator control，problem of（操作臂控制，问题），294-295
Manipulator kinematics（操作臂运动学），62-100
inverse（逆向），101 - 134
link transformations:（连杆变换），76
concatenating（连续的），76
derivation of（导数），73-76
"standard" frames（"标准" 坐标系），89-91
Manipulator subspace（操作臂子空间），107-109
Manipulator-mechanism design（操作臂的机械设计），230-261
actuation schemes（驱动方式），244-247
actuator location（驱动器的布局），244-245
reduction/transmission systems（减速/传动系统），245-247
articulated manipulator（铰接型操作臂），235
basing design on task requirements（基于任务需求的设计），231-233
accuracy（定位精度），233
degrees of freedom，number of（自由度，数目），231-232
load capacity（负载能力），233

repeatability（重复精度），233
speed（速度），233
workspace（工作空间），233
Cartesian manipulator（笛卡儿操作臂），234-235
closed-loop structures（闭环结构），242-244
cylindrical configuration（圆柱面坐标位形），236-237
force sensing（力觉），253-254
kinematic configuration（运动位形），234-239
position sensing（位置检测），252
redundant structures（冗余结构），241-242
SCARA configuration（SCARA位形），235-236
spherical configuration（球面坐标位形），236
stiffness/deflections（刚度/变形），246-252
actuators（驱动器），250-252
belts（带），249
flexible elements in parallel and in series（并联和串联的柔性元件），247
gears（齿轮），248-249
links（连杆），249-250
shafts（轴），247-248
well-conditioned workspaces（良好条件的工作空间），241
workspace attributes, quantitative measures of（工作空间属性，定量测量），239-241
workspace generation, efficiency of design in terms of（生成工作空间，按照……设计的效果），240
wrist configuration（腕关节位形），237-239
Manipulators（操作臂），3
accuracy of（定位精度），127
control problems for（控制问题），295-296
design（设计），10-11
dynamics（动力学），9-10，165-200
force control（力控制），13
forward kinematics of（正（向）运动学），4-6
inverse kinematics of（逆（向）运动学），6-7
kinematics（运动学），62-100
linear position control（线性位置控制），11-12
mechanics and control of（机构与控制），4-15
nonlinear position control（非线性位置控制），12-13
off-line programming and simulation(离线编程和仿真)，15
position and orientation（位置与姿态），4
programming robots（可编程机器人），13-15
repeatability（重复精度），127
sensors（传感器），10-12
singularities（奇异性，奇异点），7-9
static forces（静力），7-9
static forces in（作用在……上的静力），153-156
trajectory generation（轨迹生成），9-10
velocities（速度），7-9
workspace（工作空间），102
Mappings（映射），7，24 - 29
involving general frames（关于一般坐标系），27-29
involving rotated frames（关于旋转坐标系），25-27
involving translated frames（关于平移坐标系），24-25
Mass distribution（质量分布），167-171
inertia tensor（惯性张量），167，171
mass moments of inertia（惯量矩），168
mass products of inertia（惯量积），168-169
parallel-axis theorem（平行移轴定理），170
principal axes（主轴），169
principal moments of inertia（主惯量矩），169
Mass matrix（质量矩阵），177
Mass moments of inertia（惯量矩），168
Mass products of inertia（惯量积），168-169
Mechanical impedance（机械阻抗），332
Mechanical manipulators, *See* Manipulators Memorization scheme（机械操作臂，见操作臂程序存储方案），192
Micromanipulators（微操作臂），242
Model-based portion（基于模型的控制部分），273
Moment of inertia（惯量矩），167
Motion specification（运动指令），345-346
Motor torque constant（电机转矩常数），278
Motor-armature inductance（电机电枢感抗），279-280
Mouse（鼠标），356
Moving linearization（运动线性化），291
Multi-input, multi-output (MIMO) control systems（多输入多输出(MIMO)控制系统），264，295
Multiprocess simulation（多过程仿真），358

Natural constraints（自然约束），319-321
Natural frequency（固有频率），268
Newton's equation（牛顿方程），171-172
Noise（噪声），276
Nonautonomous system（非自治系统），305
Nonlinear control algorithms（非线性控制算法），12-13
Nonlinear control of manipulators（操作臂非线性控制），290-313
adaptive control（自适应控制），311-312

Cartesian-based control systems（基于笛卡儿空间的控制系统），307-311
Cartesian decoupling scheme（笛卡儿空间解耦控制方法），310-311
defined（定义），308
intuitive schemes of Cartesian control（笛卡儿空间的直接控制方法），309-310
joint-based schemes compared to（与关节空间控制方法的比较），307-309
current industrial-robot control systems（当前的工业机器人控制系统），301-303
Lyapunov stability analysis（李雅普诺夫稳定性分析），303-307
manipulators，control problems for（操作臂，控制问题），295-296
multi-input，multi-output (MIMO) control systems（多输入多输出(MIMO)控制系统），295
nonlinear systems（非线性系统），291-294
practical considerations（实际问题），296-301
dual-rate computed-torque implementation（双速率计算力矩方法），298-299
feedforward nonlinear control（非线性前馈控制），297-298
parameters，lack of knowledge of（参数，缺少……信息的情况），299-301
time required to compute the model（模型计算耗时），296-297
time-varying systems（时变系统），291-294
Nonlinear position control（非线性位置控制），12-13
Nonproper orthonormal matrices（非标准正交矩阵），40
Nonrigid body effects（非刚体效应），188-189
Coulomb friction（库仑摩擦），188-189
Coulomb-friction constant（库仑摩擦常数），188
viscous friction（粘性摩擦），188-189
Notation（符号），16
Denavit-Hartenberg notation（Denavit-Hartenberg符号），67
for orientation（方位，姿态），135-138
for time-varying positions（时变位置），135-138
vector（矢量），16
Numerical differentiation（数值微分），252
Numerical solutions（数值解法），106
Numerically controlled (NC) milling machines（数控(NC)磨床），3
Off-line programming (OLP) systems（离线编程(OLP)系统），353-371
automating subtasks in（自动子任务），367-369
automatic assessment of errors and tolerances（误差和公差的自动估计），369
automatic planning of coordinated motion（坐标运动的自主规划），368
automatic robot placement（自动确定机器人位移），367-368
automatic scheduling（自主规划），368
collision avoidance and path optimization（避障与路径优化），368
force-control simulation（力控制仿真），368
central issues in（核心问题），355-360
defined（定义），353
dynamic emulation（动力学仿真），358
kinematic emulation（运动学仿真），357-358
language translation to target system（翻成目标系统的语言），359
multiprocess simulation（多过程仿真），358
path-planning emulation（路径规划仿真），358
Pilot simulator（引导仿真器），360-367
sensors，simulation of（传感器，仿真），359
3-D modeling（三维建模），356-357
user interface（用户接口），355-356
workcell calibration（工作单元标定），359-360
Off-line programming systems（离线编程系统），15
Operating point（操作点），291
Open-loop scheme（开环控制方式），263-264
Operational point（操作点），14
Operational space（操作空间），6脚注，76
Operators（算子），30-34
rotational（旋转），31-32
transformation（变换），33-34
translational（平移），30-31
Orientation（方位，姿态）:
angle-set conventions（轴角坐标系表示法），46
description of（描述），20-22
equivalent angle-axis representation（等效轴角坐标系表示法），46-50
Euler parameters（欧拉参数），50-51
notation for（符号），135-138
predefined（预定义），51
proper orthonormal matrices（标准正交矩阵），40
taught（示教），51
X-Y-Z fixed angles（X-Y-Z固定角坐标系），41-43
Z-Y-X Euler angles（Z-Y-X欧拉角），43-45
Z-Y-Z Euler angles（Z-Y-Z欧拉角），45-46
Orienting structure（定向结构），234

Orthogonal intersecting shafts（正交轴），245
Orthonormal matrix，property of the derivative of（正交矩阵，导数的性质），141
Overdamped system（过阻尼系统），266
Overload protection（过载保护），253

Parallel shafts（平行轴），245
Parallel-axis theorem（平行移轴定理），170
Parallelism（并行操作），358
Parts-mating tasks（零件装配任务），318
Pascal（Pascal语言），341
Passive compliance（被动柔顺性），333
Path generation at run time（路径的实时生成），222-224
  Cartesian-space paths，generation of（笛卡儿空间路径，生成），223-224
  joint-space paths，generation of（关节空间路径，生成），222-223
Path generator（路径生成器），216
Path planning（路径规划），224-225
  collision-free（无碰撞），225
Path points（路径点），202
Path-planning emulation（路径规划仿真），358
Path-update rate（路径更新率），201
Pick and place locations（抓取和放置位置），233
Pick and place operations（抓持和放置操作），318
PID control law（PID控制律），277，284 -285
Pilot simulator（引导仿真器），360-367
  adjusting probabilities as a function of drop height（下落高度函数的调节概率），362-363
  alignment of the part during grasp，computation of（抓持过程中零件的排列，计算），364-365
  bins（立方体），363
  bounce，simulation of（反弹，模拟），363
  computing which part to grasp（应抓持零件的计算），364
  connecting tray conveyors/sources and sinks（托盘传送机、托盘供给器和托盘接收器之间的连接），365-366
  default grasp location，computation of（缺省抓持位置，计算），364
  findspace algorithm（空间搜索算法），364
  inspector sensors（监测传感器），367
  part grasping，geometric algorithms for（零件抓持，几何算法），364
  part pushing，geometric algorithms for（零件上料，几何算法），365
  part tumbling，geometric algorithms for（零件翻转，几何算法），361-362
  physical modeling and interactive systems（物理建模与交互系统），361
  proximity sensors（接近传感器），366
  pushbar（推杆），365
  pushing of trays（托盘上料），366
  sensors，geometric algorithms for（传感器，几何算法），366
  stable-state estimator algorithm（稳态估计算法），363
  stable-state probabilities（稳态概率），362
  stacking/tangling，simulation of（堆积和混迭，仿真），363-364
  tray conveyors，geometric algorithms for（托盘传送机，几何算法），365
  2-D vision systems（二维视觉系统），366-367
Pitch（俯仰角），41
Pneumatic cylinders（气缸），251
Points（点）:
  computed（计算），127
  operating（操作），291
  operational（操作），14
  path（路径），202
  pseudo via（伪中间），216-217
  taught（示教），127
  TCP (Tool Center Point)（TCP（工具中心点）），14
  through（经过），216
  via（中间），10，14，202，205-209，212-216
  wrist（腕关节），234
Poles（极点），265
Polynomials: and closed-form solutions（多项式：封闭形式的解），114
  cubic（三次），203 - 205
  higher-order（高阶），209-210
Position constraints（位置约束），320-321
Position control system（位置控制系统），11
Position sensing（位置检测），252
Position vector（位置矢量），20
Position vectors，differentiation of（位置矢量，微分），136-137
Position -control law（位置控制法则），13
Positioning structure（定位结构），234
Position-regulation system（位置校正系统），271-272
Positive definite matrix（正定矩阵），182
Potentiometers（电位计），252

Predefined orientations（预定义姿态），51
Press-fit joints, and hysteresis（过盈配合关节，滞后），254
Principal axes（主轴），169
Principal moments of inertia（主惯量矩），169
Prismatic joints（移动关节），5，63
Programming environment（编程环境），346
Programming paradigm（编程方式），360
Programming robots（可编程机器人），13-15
Proper orthonormal matrices（标准正交矩阵），40
Proprioceptive sensors（本体传感器），230
Pseudo via points（伪中间点），216-217
PUMA 560 (Unimation)（PUMA 560 (Unimation)型机器人），235，284，357
defined（定义），83-84
inverse manipulator kinematics（操作臂逆运动学），117-121
kinematics of（运动学），77-83
link parameters（连杆参数），80
solutions（解），104-105

Quadratic form（二次型），182

RAPID (ABB Robotics)（RAPID（ABB机器人公司），341
RCC (remote center compliance)（RCC（微偏心柔顺），333
Reachable workspace（可达工作区间），102
Real and equal roots（两个相等的实根），267，269-271
Real and unequal roots（两个不相等的实根），266-267
Redundancies（冗余），241-242
Redundant degree of freedom（冗余自由度），231-232
Reference inputs, tracking（参考输入，跟踪），278
Remote center compliance (RCC)（微偏心柔顺(RCC)），333
Repeatability（重复精度），127，233
Repeated roots（重根），269
Resolved-rate algorithm（分步速度控制算法），163-164
Resolvers（感应同步器），252
Resonances（共振），246，247
structural（结构），278
unmodeled（未建模的），281
Resonant frequency, estimating（共振频率，估计），282-283
Revolute joints（转动关节），5，63
Rigid-body dynamics, form of（刚体动力学方程，形式），295
Robot（机器人）:
specialized（专用），11
universal（通用），11
Robot programming（机器人编程）:
levels of（级别），340-342
teach by showing method（示教方法），340
Robot programming languages (RPLs)（机器人编程语言(RPLs)），13-15，339-350，354
categories of（类型），341
defined（定义），342
description of paths with（使用……描述路径），224
explicit programming languages（动作级编程语言），341-342
problems peculiar to（特殊问题），347-350
context sensitivity（程序前后的关联性），348-349
error recovery（误差校正），349-350
internal world model vs. external reality（内部世界模型与外部实际环境的关系），347-348
requirements of（必要条件），344-347
flow of execution（操作流程），346
motion specification（运动指令），345-346
programming environment（编程环境），346
sensor integration（传感器融合），347
world modeling（世界模型），344-345
robot library for a new general-purpose language（应用新型通用语言的机器人程序库），341
robot library for an existing computer language（应用已有计算机语言的机器人程序库），341
sample application（应用实例），342-344
specialized manipulation languages（专用操作语言），341
task-level programming languages（任务级编程语言），342，354
Robotic manipulation（机器人操作），19
Robots（机器人）:
gantry（龙门式），234
motion of the robot links（机器人连杆的运动），144
programming（编程），13-15
tool, position/orientation of（工具，位置/姿态），91
Robust controller（鲁棒控制器），298
Rodriques's formula（Rodriques公式），58，373
Roll（回转角），41
Roller chains（传动链），246
Rotary optical encoder（旋转光学编码器），252
Rotated frames, mappings involving（旋转坐标系，关于……映射），25-27
Rotation matrix（旋转矩阵），21

Rotational operators（旋转算子），31-32
Rotational velocity（转速），139-140
simultaneous linear velocity（与线速度同时存在），140-141
Rotor（转子），278
RRR mechanism（RRR机构），69-71
Run time（实时）:
defined（定义），222
path generation at（路径生成），222-224

Sampling rate（采样速率），297
SCARA configuration（SCARA位形），235-236
Second-order linear systems（二阶线性系统），264-271
characteristic equation（特征方程），265
complex roots（复根），266，267-269
control of（控制），271-273
initial conditions（初始条件），265
Laplace transforms（拉普拉斯变换），265
poles（极点），265
real and equal roots（两个相等的实根），267，269-271
real and unequal roots（两个不相等的实根），266-267
Semiconductor strain gauges（半导体应变计），254
Sensor integration（传感器融合），347
Sensors（传感器），10-12
proprioceptive（本体的），230
simulation of（仿真），359
wrist（腕部），253
Servo error（伺服误差），264，331
Servo portion（伺服控制部分），273，292
Servo rate（伺服速度），277
Set-point（定位点），285
Shafts（轴），247-248
Similarity transform（相似变换），57
Simple applications（简单应用），318
Simulation（仿真），9
Simulation specific code（仿真专用代码），360
Single joint, modeling/controlling（单关节，建模/控制），278-284
effective inertia（有效惯量），280
estimating resonant frequency（共振频率估计），282-283
motor-armature inductance（电机电枢感抗），279-280
unmodeled flexibility（未建模柔性），281-282
Single-input, single-output (SISO) control systems（单输入单输出(SISO)控制系统），264
Singularities of the mechanism (singularities)（机构的奇异位形（奇异状态，奇异性）），9，151-153
workspace-boundary singularities（工作空间边界的奇异位形），151
workspace-interior singularities（工作空间内部的奇异位形），152
Sink records（接收记录），365-366
Skew shafts（普通丝杠），245
Skew-symmetric matrices（反对称矩阵），142
Softening position gains, compliance through（降低位置增益，柔顺性），333-334
Solvability（可解性），101-106
existence of solutions（解的存在性），102-103
method of solution（解法），105-106
multiple solutions（多重解），103-105
SOLVE function（SOLVE函数），126
Spatial constraints on motion（运动中的空间约束），202
Spatial descriptions（空间描述），19-23
defined（定义），19
of a frame（坐标系的），22-23
of an orientation（姿态，方位），20-22
of a position（位置），20
Specialized robot（专用机器人），11
Speed（速度），233
Speed-reduction system（减速系统），245
Spherical configuration（球面坐标位形），236
Spline（样条），10
Spot welding（点焊），318
Spray painting（喷涂），318
Stable system（稳定系统），264
Standard frames（标准坐标系），89-91
base frame (B)（基坐标系(B)），89，125
goal frame (G)（目标坐标系(G)），91，125
location of（位置），125
station frame (S)（工作台坐标系(S)），90，125
tool frame (T)（工具坐标系(T)），90，125-126
use in a general robot system（一般的机器人系统中的应用），125-126
wrist frame (W)（腕部坐标系(W)），90
State-space equation（状态空间方程），180-181
centrifugal force（离心力），181
Coriolis force（哥氏力），181
Static forces（静力），153-156
Cartesian transformation of velocities and（笛卡儿速

度变换)，157-159
Station frame (S)（工作台坐标系(S)），90，125
Stator（定子），278
Steady-state analysis（稳态分析），276
Steady-state error（稳态误差），276
Stewart mechanism（Stewart机构），243-244
Stiffness（刚度）:
actuators（驱动器），250-252
belts（带），249
flexible elements in parallel and in series（并联和串联的柔性元件），247
gears（齿轮），248-249
links（连杆），249-250
shafts（轴），247-248
Strain gauges（应变计），253
Structural length index（结构长度指标），240
Structural resonances（结构共振），278
Subspace（子空间），107
Sum-of-angle formulas（二角和公式），82

Tachometers（转速计），252
Tangle factor（混迭因子），363
Task space（任务空间），6 脚注
Task-level programming languages（任务级编程语言），342
Task-oriented space（任务空间），76
Taught orientations（示教姿态），51
Taught point（示教点），127
TCP (Tool Center Point)（TCP（工具中心点）），14
Teach and playback manipulators（示教-再现操作臂），127
Teach pendant（示教盒），285，340
Temporal attributes of motion（运动的瞬时属性），202
Three roll wrist（三转动腕关节），238
3-D modeling（三维建模），356-357
Through points（经过点），216
Time-varying positions，notation for（时变位置，符号），135-138
Tool frame（工具坐标系），5
Tool frame (*T*)（工具坐标系(*T*)），90，125-126
Tool，position/orientation of（工具，位置/姿态），91
Torque ripple（转矩波动），279
Tracking reference inputs（跟踪参考输入），278
Trailing subscripts/superscripts，in notation（右下标/右上标，符号），16
Trajectory，defined（轨迹，定义），201
Trajectory generation（轨迹生成）10，201-239
Cartesian paths，geometric problems with（笛卡儿路径，几何问题），219-222
Cartesian-space schemes（笛卡儿空间规划方法），216-219
Cartesian straight-line motion（笛卡儿直线运动），217-219
joint-space schemes（关节空间的规划方法），203-216
cubic polynomials（三次多项式），203-205
cubic polynomials for a path with via points（具有中间点路径的三次多项式），205-209
higher-order polynomials（高阶多项式），209-210
linear function with parabolic blends（与抛物线拟合的线性函数），210-212
linear function with parabolic blends for a path with via points（具有中间点的路径与抛物线拟合的线性函数），212-216
path description and generation（路径描述和路径生成），201-203
path generation at run time（路径的实时生成），222-224
Cartesian-space paths，generation of（笛卡儿空间路径，生成），223-224
joint-space paths，generation of（关节空间路径，生成），222-223
path planning（路径规划），224-225
collision-free（无碰撞），225
robot programming languages（机器人编程语言），224
Trajectory-conversion process（轨迹变换过程），307-309
Trajectory-following control，defined（轨迹跟踪控制，定义），275
Trajectory-following control system（轨迹跟踪控制系统），272
Transducers，flexibility in（传感器，柔性），254
Transform equations（变换方程），37-39
Transform mapping（变换映射），34
Transform operator（变换算子），34
Transformation（变换）:
of free vectors（自由矢量），51-52
order of（顺序），53
Transformation arithmetic（变换计算），34-37
compound transformations（混合变换），34-35
inverting a transform（逆变换），35-37
Transformation operators（变换算子），33-34

Translated frames, mappings involving（平移坐标系，关于……映射），24-25
Translational mapping（平移映射），24-25
Translational operators（平移算子），30-31
Transmission system（传动系统），245
Transpose-Jacobian controller（转置雅可比控制器），309
Trigonometric identities（三角恒等式），372-373
Types（模型），344

Underdamped system（欠阻尼系统），266
Unit quaternion（单位四元数），50
Universal robot（通用机器人），11
Universe coordinate system（世界坐标系），19
Unmodeled flexibility（未建模柔性），281-282
Unmodeled resonances（未建模共振），281
Unstable performance（不稳定（性）），264
UPDATE simulation routine（UPDATE仿真程序），287
User interface（用户接口），355-356

VAL language（VAL语言），285，341，345
Vane actuators（气动驱动器），250-251
Vector cross-product（矢量积，矢量叉乘），142
Vector notation（矢量符号），16
Vectors（矢量）:
  actuator（驱动器），77
  angular（角），137-138
  position, differentiation of（位置，微分），136-137
Velocities, Cartesian transformation of（速度，笛卡儿变换），157-159
Velocity（速度）:
  angular（角），141-144
  linear（线性），138-139
  of a point due to rotating reference frame（由于参考系旋转的点的），141-142
  rotational（转动的），139-140
Velocity transformation（速度变换），158-159
Via points（中间点），10，14，202
  cubic polynomials for a path with（路径三次多项式），205-209
  linear function with parabolic blends for a path with via points（具有中间点的路径与抛物线拟合的线性函数），212-216
Virtual work（虚功），156
Viscous friction（粘性摩擦），188-189

Welded joints, and hysteresis（焊接关节，滞后），254
Well-conditioned workspaces, designing（良好条件的工作空间，设计），241
WHERE function（WHERE函数），91
Work envelope（工作空间包络），233
Work volume（工作空间体积），233
Workcell（工作单元，工序），339，344
  calibration（标定），359-360
Workspace（工作空间），7，102-103，233
  generation of, efficiency of design in terms of（生成，按照……设计的效果），240
  and tool-frame transformation（工具坐标系变换），103
Workspace attributes, quantitative measures of（工作空间属性，定量测量），239-241
Workspace-boundary singularities（工作空间边界奇异位形），151
Workspace-interior singularities（工作空间内部奇异位形），152
World modeling（世界模型），344-345
Wrist configuration（腕关节构形），237-239
Wrist frame (W)（腕部坐标系(W)），90
Wrist point（腕关节原点），234
Wrist sensors（腕力传感器），253
Wrist-partitioned class of mechanisms（腕部机构布局形式），234

X-Y-Z fixed angles（X-Y-Z固定角坐标系），41-43

Yasukawa Motoman L-3（Yasukawa Motoman L-3 型机器人），235，245
  defined（定义），83
  inverse manipulator kinematics（操作臂逆（向）运动学），121-125
  kinematics of（运动学），83-89
  link frames, assignment of（连杆坐标系，布局，配置），87
  link parameters of（连杆参数），88
Yaw angles（偏转角），41

Z-Y-X Euler angles（Z-Y-X欧拉角），43-45
Z-Y-Z Euler angles（Z-Y-Z欧拉角），45-46

更多资料请联系
QQ：841876196

温馨提示

该资料收集于网络，仅供学术研究之用。若用于非法目的或恶意扩散，所造成的一切后果由使用者自行承担。若喜欢此书，建议购买正版图书以支持作者。谢谢！